

## Chapitre 4

# Description modale : mécanismes dissipatifs, entretien

Bien que les systèmes oscillants qui nous intéressent, en particulier les instruments de musique, constituent des oscillateurs très peu amortis, l'amortissement joue un rôle psychoacoustique essentiel car il fait toute la différence entre un son entretenu ou non : les différences perçues dans le déroulement temporel de l'un et l'autre cas sont si fines que même l'auditeur le plus distrait ne prendra jamais l'un pour l'autre. Nous allons reprendre la présentation des modes propres dans les instruments de musique en introduisant les mécanismes dissipatifs comme des petites perturbations. Comme nous l'avons fait pour l'oscillateur simple, nous montrerons l'effet sur la fréquence et celui sur le facteur de qualité. Ces effets étant relativement importants dans les instruments à vent, ils conduisent à corriger la forme du résonateur afin de retrouver la justesse et à adjoindre un système excitateur. Nous montrerons au moyen d'une approche par les perturbations comment ces différents phénomènes se trouvent tous reliés entre eux au niveau de leurs effets, ce qui constitue la principale difficulté dans la facture des instruments.

### 4.1. Du frottement

Dans cette approche modale, commençons par un examen des différentes causes d'irréversibilité que l'on rencontre, dans les instruments de musique en particulier. Les phénomènes viscothermiques sont traités ailleurs dans un cadre plus général (voir cours de M. Bruneau). On pourra considérer la première approche ci-après comme un exercice introductif. À l'intérieur d'un instrument à vent, le frottement de l'air sur les parois fait intervenir deux mécanismes dans la couche limite : l'un lié à la viscosité, l'autre au transport thermique. Une corde vibrante est amortie par frottement dans l'air, du fait de la viscosité. Elle est amortie également par les frot-

tements internes, qui font intervenir deux mécanismes : viscoélasticité et thermoélasticité. Les vibrations des tables d'harmonies s'accompagnent de frottements internes, de frottements dans l'air, mais aussi de rayonnement (qui n'est pas un frottement).

Tout frottement dégrade de l'énergie mécanique en chaleur, qui sera finalement évacuée. Modéliser les frottements, c'est étudier chaque cause d'irréversibilité : point n'est besoin de savoir comment la chaleur sera évacuée. Mathématiquement, chaque irréversibilité se traduit dans les équations par un terme qui n'est plus invariant par renversement du temps (changement de  $t$  en  $-t$ ). L'invariance par renversement du temps traduit le fait que l'on peut inverser à chaque instant l'histoire du processus mécanique, ce qui est le propre d'un processus thermodynamiquement réversible : en ce cas, il n'y a aucune dégradation d'énergie mécanique en chaleur.

#### 4.1.1. Viscosité de l'air dans la couche limite

Considérons une onde plane se propageant parallèlement à une paroi plane :

$$p(x, t) = p_o \exp(\pm jkx) \exp(-j\omega t) \quad [4.1]$$

Le comportement de l'onde est caractérisé par sa pression acoustique, mais aussi par la vitesse acoustique : celle-ci est perturbée par la paroi sur laquelle la viscosité impose l'annulation de la vitesse tangentielle. La vitesse acoustique de l'onde loin de la paroi,  $u_o(x, t)$ , est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t} u_o(x, t) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad [4.2]$$

Au voisinage de la paroi, de cote  $z = 0$ , la vitesse acoustique  $u(z, x, t)$  diminue. On constate l'existence d'une force de viscosité  $f_s$  par unité de surface (due

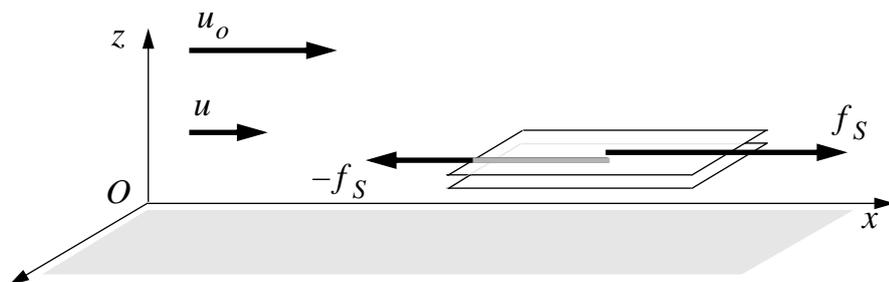


Figure 4.1. Viscosité en présence d'une paroi.

à un processus de diffusion du moment cinétique)

$$f_S = \mu \frac{\partial}{\partial z} u(z, x, t) \quad [4.3]$$

représentant l'action de l'onde incidente sur le fluide côté paroi. Cette force est tangentielle et dirigée selon  $Ox$ . Une tranche d'air d'épaisseur  $dz$  subit l'action de la viscosité côté onde et la réaction côté paroi, soit une résultante

$$\delta f_S = \mu \frac{\partial}{\partial z} u(z + dz) - \mu \frac{\partial}{\partial z} u(z) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz$$

par unité de surface. Par unité de volume, cette force a pour expression :

$$f = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad [4.4]$$

*Définition* : le facteur de proportionnalité  $\mu$  entre la *force par unité de surface* et le *gradient de la vitesse* ([4.3]) s'appelle *coefficient de viscosité*. Pour l'air :

$$\mu = 1,846 \times 10^{-5} \text{ Pa.s} = 1,846 \times 10^{-5} \text{ kg/m.s} \quad [4.5]$$

On utilise également la *viscosité cinématique* :

$$\mu/\rho = 1,846 \times 10^{-5} / 1,2 = 1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

L'équation de la dynamique prend maintenant la forme suivante :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} u(z, x, t) - \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(z, x, t) = - \frac{\partial}{\partial x} p(x, t) \quad [4.6]$$

Dans le cas particulier où  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  (pas de second membre), elle se réduit à

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad [4.7]$$

dont les solutions sont du type

$$u = A \exp(\pm \kappa_v z) \exp(-j \omega t) \quad \text{avec} \quad \kappa_v^2 = -j \frac{\omega \rho}{\mu} \quad \kappa_v = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega \rho}{\mu}} \quad [4.8]$$

*Définition* : l'équation [4.7] s'appelle une *équation de diffusion*. Contrairement à l'équation des ondes, elle n'est pas invariante par renversement du temps (changement de  $t$  en  $-t$ ). À cette caractéristique mathématique correspond une interprétation physique : l'équation concerne des processus thermodynamiquement irréversibles, dont la chronologie ne peut être inversée.

L'équation différentielle en  $z$  [4.6] est linéaire. Tenons compte des conditions aux limites. La solution s'annulant en  $z = 0$  s'écrit

$$u(z, x, t) = [1 - \exp(-\kappa_v z)] u_o(x, t) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial u_o}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

où  $u_o(x, t)$  est la solution loin du plan  $z = 0$ . Il y a freinage et déphasage autour de  $z = 0$ , le freinage correspondant à la partie réelle et le déphasage à la partie imaginaire de  $[1 - \exp(-\kappa_v z)]$ . L'épaisseur de cette couche limite est donnée par :  $\text{Re}(\kappa_v^{-1})$  (de l'ordre de  $50 \mu\text{m}$  à  $1000 \text{Hz}$ ).

Pour l'onde plane, l'expression de la pression [4.1] n'est pas affectée par l'existence de la viscosité mais la vitesse doit être corrigée comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1 - \exp(-\kappa_v z)}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad [4.9]$$

On voit que, dans le système masse-ressort qui caractérise la propagation, c'est la masse volumique qui est affectée par la viscosité. Pour un tuyau de section circulaire (rayon  $r$ ), il est commode d'effectuer une moyenne sur la section :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\langle \rho \rangle} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r 2\pi z [1 - \exp(-\kappa_v(r-z))] dz \quad [4.10]$$

On pourra alors conserver la description inertielle habituelle de l'onde avec une valeur modifiée de la masse volumique :

$$\frac{1}{\langle \rho \rangle} \approx \frac{1}{\rho} \left( 1 - \frac{2}{\kappa_v r} \right) \quad \text{approximation valable pour} \quad |\kappa_v| r \gg 1 \quad [4.11]$$

Cette correction est essentielle dans les résonateurs d'instruments à vent.

Considérons maintenant la situation opposée où le rayon est très petit devant l'épaisseur de la couche limite. À fréquence nulle, d'après [4.6], la force volumique de viscosité devient indépendante de  $z$ , ce qui conduit à un profil de vitesse parabolique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \text{cte} \quad u|_{z=r} = 0 \quad u(z) \text{ paire} \quad \rightarrow \quad u \approx u_o \left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right) \quad [4.12]$$

La chute de pression par unité de longueur vaut alors :

$$\Delta p_L = 2\mu u_o / r^2$$

Le débit correspondant est donné par :

$$\phi = \int_0^r 2\pi z u(z) dz = \frac{\pi r^2 u_o}{2} = \pi r^2 \langle u \rangle \quad \text{avec} \quad \langle u \rangle = \frac{u_o}{2}$$

Par unité de longueur, le frottement de viscosité produit une résistance acoustique ou une résistance mécanique respectivement égales à :

$$R_L^{\text{acoust}} = \frac{4\pi\mu}{(\pi r^2)^2} \quad R_L^{\text{méca}} = 4\pi\mu \quad \text{valable pour} \quad |\kappa_v| r \ll 1 \quad [4.13]$$

On appelle ce phénomène la *perte de charge*.

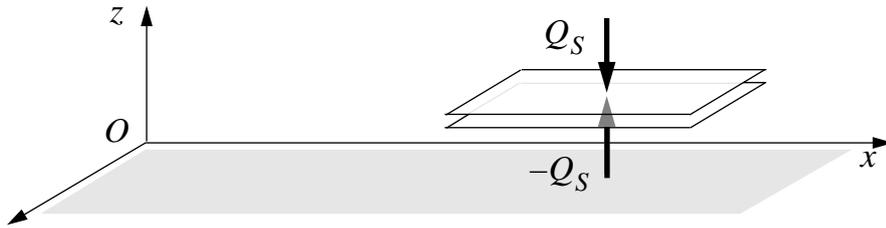
#### 4.1.2. Conductivité thermique de l'air dans la couche limite

Considérons maintenant l'influence thermique de la paroi sur notre onde plane se propageant parallèlement à la paroi plane :

$$p(x, t) = p_o \exp(\pm j k x) \exp(-j \omega t) \quad [4.14]$$

La température de l'air est fonction de la distance  $z$  à la paroi :  $\theta(z, x, t)$  ( $\theta_o(x, t)$  loin de la paroi).

La chaleur apportée par unité de temps à travers le plan de cote  $z$  par le fluide côté onde au fluide côté paroi (due à un processus de diffusion du moment cinéti-



**Figure 4.2.** *Transport thermique en présence d'une paroi.*

que, au même titre que la viscosité) est proportionnelle au gradient de température, soit :

$$\frac{\partial Q_s}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial z} \theta(z, x, t) \quad [4.15]$$

représentant l'action de l'onde incidente sur le fluide côté paroi.

*Définition* : le coefficient de proportionnalité  $\lambda$  entre le *flux de puissance calorifique par unité de surface* et le *gradient de température* ([4.15]) s'appelle la *conductivité thermique*.

En tenant compte du flux de chaleur cédée côté paroi, une tranche d'épaisseur  $dz$  reçoit par unité de surface et par unité de temps un flux de chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta Q_s = \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} dz$$

La chaleur reçue par unité de volume et de temps est donc donnée par

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad [4.16]$$

$\lambda$  étant la conductivité thermique de l'air. L'équation d'état donne, en dérivant par rapport à  $t$  :

$$PV = RT \quad \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} \quad \frac{1}{P} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{T} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad [4.17]$$

Décomposons le changement dû au passage de l'onde en une transformation n°1

à volume constant suivie d'une transformation n°2 à pression constante :

$$\begin{aligned} \text{transformation n}^\circ 1 \quad \frac{dP}{P} &= \frac{dT_1}{T} & dQ_1 &= c_V dT_1 = T c_V \frac{dP}{P} \\ \text{transformation n}^\circ 2 \quad \frac{dV}{V} &= \frac{dT_2}{T} & dQ_2 &= c_P dT_2 = T c_P \frac{dV}{V} \end{aligned}$$

Pendant un temps  $dt$  et par unité de volume, la chaleur associée au changement de pression et de volume est donc

$$dQ = T \left( c_V \frac{dP}{P} + c_P \frac{dV}{V} \right) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = T \left( \frac{c_V}{P} \frac{\partial p}{\partial t} + c_P \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

En régime permanent, la chaleur associée au changement de pression et de volume est apportée par la conduction thermique :

$$T c_P \left( \frac{1}{\gamma P} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad [4.18]$$

Par élimination de  $u$  entre les équations [4.17] et [4.18], on obtient

$$T \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{T}{P} \frac{\partial}{\partial t}(p) = \frac{\lambda}{c_P} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{T}{\gamma P} \frac{\partial p}{\partial t}$$

L'équation qui régit la température est donc la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta(z, x, t) - \frac{\lambda}{c_P} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \theta(z, x, t) = \frac{T}{P} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) \quad [4.19]$$

Quand  $\frac{\partial p}{\partial t} \equiv 0$ , l'équation de la température est une équation de diffusion :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\lambda}{c_P} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad [4.20]$$

( $c_P$  chaleur spécifique par unité de volume à pression constante). Les solutions

sont du type :

$$\theta = B \exp(\pm \kappa_t z) \exp(-j \omega t) \quad \text{avec} \quad \kappa_t^2 = -j \frac{\omega c_P}{\lambda} \quad \kappa_t = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega c_P}{\lambda}} \quad [4.21]$$

L'équation différentielle en  $z$  [4.19] est linéaire. Tenons compte des conditions aux limites. La solution s'annulant en  $z = 0$  est de la forme :

$$\theta(z, x, t) = [1 - \exp(-\kappa_t z)] \theta_o(x, t) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \theta_o}{\partial t} = \frac{T}{P} \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} \quad [4.22]$$

Loin de la paroi, la variation de température  $\theta_o(x, t)$  est donc en régime adiabatique :

$$\theta_o(x, t) = \frac{T}{P} \frac{\gamma-1}{\gamma} p(x, t) \quad \leftrightarrow \quad P \frac{\gamma-1}{\gamma} = \text{cte} RT \quad [4.23]$$

et le module de compressibilité est donné par  $K = \gamma P$ . Au voisinage de la paroi, d'après [4.22],  $\theta(0, x, t) = 0$  : le comportement de l'air devient isotherme, avec  $K = P$ . Du changement de module de compressibilité, il résulte que la vitesse acoustique devient elle aussi fonction de  $z$  :  $u(z, x, t)$ . D'après [4.17], on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{T} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{1}{P} \frac{\partial p}{\partial t} = [1 - \exp(-\kappa_t z)] \frac{\gamma-1}{\gamma P} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\gamma}{\gamma P} \frac{\partial p}{\partial t}$$

On en déduit la forme modifiée de l'équation de conservation pour la propagation des ondes acoustiques :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1 + (\gamma-1) \exp(-\kappa_t z)}{K} \frac{\partial p}{\partial t} \quad [4.24]$$

On peut garder l'équation de conservation habituelle pour décrire la propagation des ondes dans un instrument à vent, à condition de définir une valeur corrigée pour le module de compression  $K$  :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{\langle K \rangle} \frac{\partial p}{\partial t} \quad [4.25]$$

Pour ce faire, on effectue une moyenne sur la section de l'instrument, supposée

circulaire et de grand rayon par rapport à l'épaisseur de la couche limite :

$$\frac{1}{\langle K \rangle} = \frac{1}{K} \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^r 2\pi z [1 + (\gamma - 1) \exp(-\kappa_t(r - z))] dz \quad [4.26]$$

$$\frac{1}{\langle K \rangle} \approx \frac{1}{K} \left[ 1 + \frac{2(\gamma - 1)}{\kappa_t r} \right] \quad \text{valable pour} \quad \kappa_t r \gg 1 \quad [4.27]$$

À l'opposé, dans la limite des petits rayons, le comportement est isotherme et

$$\frac{1}{\langle K \rangle} \approx \frac{1}{P} = \frac{\gamma}{K} \quad \text{valable pour} \quad \kappa_t r \ll 1 \quad [4.28]$$

L'équation de propagation de la pression dans un instrument à vent, avec correction de viscosité sur  $\rho$  et de conductivité thermique sur  $K$ , est établie en [4.114].

#### 4.1.3. Amortissement des ondes acoustiques en espace libre

En l'absence de parois, l'amortissement est beaucoup plus faible : il n'est sensible que sur des distances relativement importantes (acoustique des salles, propagation en extérieur) et affecte les hautes fréquences (voir cours de M. Bruneau). On est conduit à introduire une partie imaginaire sur le nombre d'onde  $k$  :

$$\begin{aligned} k \rightarrow k(1 + j\delta) \quad p(x, t) &= p_o \exp[jk(1 + j\delta)x] \exp(-j\omega t) \\ &= p_o \exp(-k\delta x) \exp(jkx) \exp(-j\omega t) \end{aligned} \quad [4.29]$$

La pression acoustique diminue exponentiellement avec la distance  $x$  parcourue, l'amortissement affectant principalement les hautes fréquences puisque le facteur d'atténuation  $k\delta$  est proportionnel à  $k$  donc à la fréquence. Le phénomène est du même type que l'amortissement dans une paroi (voir ci-après). L'amortissement exponentiel en fonction de  $x$  (partie imaginaire sur  $k$ ) est le pendant de l'amortissement exponentiel en fonction de  $t$  (partie imaginaire sur  $\omega$ , voir chapitre 2).

**4.1.4. Frottement visqueux d'une corde vibrante dans l'air**

Le comportement aérodynamique réel est très compliqué du fait de l'existence d'un régime tourbillonnaire. Cependant, nous allons voir qu'un modèle très simple permet d'estimer l'ordre de grandeur de la force de frottement : sa limite de validité couvrira les applications musicales.

Soit  $M$  le point courant dans un plan normal à l'axe du cylindre constitué par la corde, de coordonnées cartésiennes  $\{r \cos \theta, r \sin \theta\}$ . En coordonnées cylindriques, on a :

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad [4.30]$$

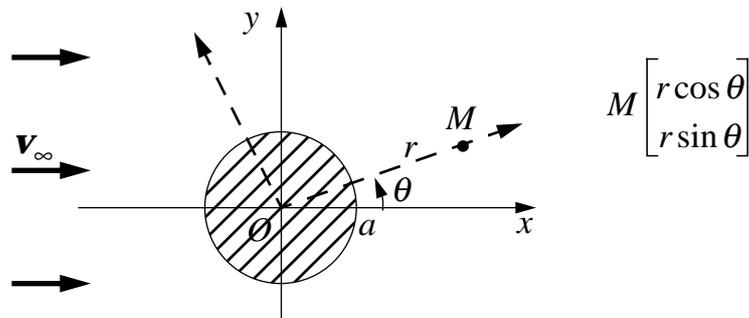
Nous considérons tout d'abord un écoulement statique sans viscosité, pour lequel nous calculons le champ de vitesses. La vitesse à l'infini, en coordonnées cartésiennes puis en coordonnées cylindriques, est donnée par :

$$\mathbf{v}_\infty(x,y) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_\infty(r,\theta) = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ -v \sin \theta \end{bmatrix} \quad [4.31]$$

Le potentiel des vitesses correspondant vérifie  $\nabla \phi = \mathbf{v}$  et  $\nabla^2 \phi = 0$  (forme statique de l'équation des ondes). Il a donc pour expression :

$$\phi_\infty(r,\theta) = vr \cos \theta \quad [4.32]$$

Il faut ajouter à ce potentiel un potentiel complémentaire assurant la nullité de



**Figure 4.3.** Frottements visqueux d'une corde dans l'air.

la composante normale de vitesse à la surface  $r = a$  de la corde :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|_{r=a} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad [4.33]$$

En prenant

$$\phi(r, \theta) = v \cos \theta \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \quad \rightarrow \quad \nabla \phi = \begin{bmatrix} v \cos \theta (1 - a^2/r^2) \\ -v \sin \theta (1 + a^2/r^2) \end{bmatrix} \quad [4.34]$$

il vient  $\nabla^2 \phi = 0$  et toutes les conditions aux limites sont vérifiées : on a donc la solution du problème, viscosité négligée.

Plaçons-nous maintenant en régime vibratoire et en présence d'une faible viscosité. Le régime ci-dessus reste valable loin de l'obstacle, mais il est perturbé au voisinage de la surface, sur l'épaisseur de la couche limite (50 $\mu$  à 1000Hz) où règne un gradient de vitesse qui a pour effet d'annuler la composante tangentielle de la vitesse.

Cette composante tangentielle à annuler a pour expression :

$$v_\theta(a, \theta) = -2v \sin \theta \quad [4.35]$$

Dans la couche limite, la vitesse varie exponentiellement (voir [4.9]). Le gradient de vitesse tangentielle est donc de l'ordre de  $v_\theta(a, \theta)/\alpha$  avec :

$$\alpha = \operatorname{Re} \kappa_v^{-1} = \operatorname{Re} \frac{\sqrt{2}}{1-j} \sqrt{\frac{\mu}{\omega \rho_{\text{air}}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\pi f \rho_{\text{air}}}} \quad [4.36]$$

La force tangentielle associée pour une aire  $ad\theta\delta z$ , pour un élément de corde de longueur  $\delta z$ , a pour expression :

$$\delta f_\theta = -\mu \frac{2v \sin \theta}{\alpha} ad\theta\delta z \quad [4.37]$$

La résultante selon  $Oy$  est nulle, celle selon  $Ox$  est proportionnelle à  $v$ . On peut donc définir une résistance mécanique en considérant le rapport de la force de

frottement à la vitesse. Par unité de longueur de corde, elle vaut :

$$R_L = \frac{f_x}{v} = \int_0^{2\pi} \frac{\delta f_\theta}{\delta z} (-\sin\theta) d\theta = \frac{2\mu a}{\alpha} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \frac{\pi\mu d}{\alpha} \quad \text{où } d = 2a \quad [4.38]$$

À basses fréquences, le calcul n'est plus valable, l'épaisseur  $\alpha$  tendant vers l'infini, nous aurions  $R_L \rightarrow 0$ . Remarquons que l'expression de  $\alpha$  a été calculée pour un plan infini. Pour un cylindre de rayon  $a$ , on conçoit que l'écoulement n'est pas perturbé à grande distance du cylindre :  $\alpha$  ne peut devenir plus grand qu'une longueur de l'ordre de  $a$ . Si nous évaluons le gradient, quelque peu brutalement, par  $\omega \rightarrow 0$   $\alpha \rightarrow a = d/2$ , la résistance mécanique qui en résulte est  $R_L \rightarrow 2\pi\mu$ .

Au total, on peut prendre par unité de longueur de corde pour la résistance mécanique l'expression suivante :

$$R_L = 2\pi\mu + \frac{\pi\mu d}{\alpha} = 2\pi\mu \left(1 + \frac{d}{2\alpha}\right) = 2\pi\mu + 2\pi d \sqrt{\pi\mu\rho_{\text{air}}f} \quad [4.39]$$

Ce résultat a été établi par Stokes (1922), en linéarisant l'équation du mouvement de la corde en présence de viscosité. L'approximation est valable tant que l'amplitude de vibration est petite, la décroissance étant alors exponentielle. Quand l'approximation n'est plus valable, le régime devient non linéaire et la décroissance n'est plus exponentielle (A. Otter, thèse, 1992). Dans la pratique, les mesures montrent que la décroissance de l'amplitude est effectivement exponentielle, ou proche d'une exponentielle, sur une gamme d'amplitude plus large que les strictes conditions de validité du calcul de Stokes. On peut donc utiliser largement la formule [4.39] dans le cas des instruments à cordes, sans introduire d'erreur importante, sauf aux amplitudes anormalement élevées où la décroissance devient plus rapide qu'une exponentielle pendant le transitoire d'attaque.

On remarquera que  $\mu$  n'est fonction que de la température, pas de la pression : il ne diminue pas en atmosphère raréfiée, du moins sur une très large gamme de pressions réduites. On a donc cette prévision surprenante : la limite basses fréquences de la résistance mécanique  $R_L$  devrait rester inchangée en atmosphère raréfiée.

#### 4.1.5. Frottement visqueux d'une verge et d'une plaque dans l'air

Nous allons élargir à la vibration des verges et des plaques le type de démarche que nous avons faite pour la corde, afin de cerner la partie thermodynamiquement

irréversible de l'interaction fluide-structure. Nous examinerons les deux cas extrêmes : grande vitesse, puis faible vitesse.

#### 4.1.5.1. Régime inertiel

Considérons d'abord la limite des grandes vitesses  $v$ , où l'écoulement est turbulent. La force de frottement  $F/S$  par unité de surface  $S$  du maître couple s'obtient à partir du coefficient de traînée :

$$C_x = \frac{F/S}{\rho_{\text{air}} v^2 / 2} \quad [4.40]$$

$C_x$  tend vers une constante qui dépend de la forme de l'objet et du type d'écoulement (décollement ou non). L'ordre de grandeur de  $C_x$ , cependant, varie relativement peu, de 0,3 pour un profil très aérodynamique, à 2 pour une plaque (limites extrêmes). On reconnaît au dénominateur l'énergie cinétique de l'air, traduisant le caractère inertiel de ce régime. On peut tenter de généraliser au cas d'un mouvement vibratoire de grande amplitude et définir une résistance mécanique par unité de surface du maître couple :

$$R_S = \rho_{\text{air}} v (C_x / 2) \quad [4.41]$$

Cette valeur est à comparer avec la résistance de rayonnement d'un disque :

$$R_{\text{ray}} = \rho_{\text{air}} c (\theta k^2 d^2 / 4) \quad (d : \text{diamètre}) \quad [4.42]$$

(valable pour un piston circulaire bafflé). On voit que, à grande vitesse et à basses fréquences, la partie réversible de l'interaction fluide-structure (rayonnement acoustique) peut devenir petite devant la partie irréversible (énergie de turbulence se dégradant en chaleur). C'est le cas pour la vibration de verges à grande amplitude, où un régime non linéaire est observé. Cette situation est atteinte quand :

$$v > \frac{2\pi^2 \theta d^2}{c C_x} f^2 \quad [4.43]$$

Quand on augmente la fréquence sans modifier la vitesse, il existe une fréquence à partir de laquelle c'est, par contre, la contribution du rayonnement qui l'emportera. Il en est ainsi pour la vibration des tables d'harmonie.

On note également que ces pertes, proportionnelles à  $\rho_{\text{air}}$ , chutent rapidement en atmosphère raréfiée. C'est une différence essentielle avec le régime laminaire, contrôlé par  $\mu$ , où on s'attend à ce qu'elles ne diminuent pas en atmosphère raréfiée.

#### 4.1.5.2. Régime laminaire

Aux faibles amplitudes, la non-linéarité s'atténue et le mécanisme de perte devient finalement linéaire quand l'aspect tourbillonnaire disparaît. En régime laminaire et en écoulement permanent,  $C_x$  devient fonction du nombre de Reynolds, donc de la vitesse, par une formule du type Lamb (voir [4.44]).

Pour des corps allongés tels qu'une verge, par exemple, on a, en notant  $d$  la largeur et  $Re$  le nombre de Reynolds :

$$C_x \approx \frac{4\pi}{Re} \quad Re = \frac{vd\rho_{\text{air}}}{\mu} \quad C_x \approx \frac{4\pi\mu}{\rho_{\text{air}}d} \frac{1}{v} \quad [4.44]$$

On en déduit la valeur correspondante de la résistance mécanique :

$$R_S = \rho_{\text{air}} v(C_x/2) \approx \frac{2\pi\mu}{d} \quad [4.45]$$

par unité de surface du maître couple. Pour une longueur  $L$  de verge, l'aire du maître couple est  $Ld$ . La résistance mécanique par unité de longueur vaut :

$$R_L \approx 2\pi\mu \quad [4.46]$$

On retrouve la valeur limite que nous avons obtenue pour la corde à basses fréquences.

On remarquera sur [4.45] comment on passe d'un régime inertiel (paramètre  $\rho_{\text{air}}$ ) à un régime laminaire (paramètre  $\mu$ ) par l'intermédiaire de  $Re$ .

#### 4.1.6. Frottement sec

Il s'agit du frottement entre deux solides.

#### 4.1.6.1. *Le modèle élémentaire*

Dans le modèle le plus simple du frottement sec, on considère un solide de référence sur lequel peut se déplacer un solide mobile, pressé contre lui par une force d'appui et soumis à une force tangentielle. Deux cas sont possibles :

- Cas n°1 : adhérence

Le frottement se traduit par la présence d'une force tangentielle proportionnelle à la force appliquée, de sens opposé. Il n'y a pas d'énergie dissipée puisque le déplacement de cette force est nul.

- Cas n°2 : glissement

La force de frottement est de sens opposé à la vitesse et de module indépendant de celle-ci.

On voit qu'un tel modèle ne saurait convenir à la description du frottement de l'archet de violon sur la corde. En effet, la force de frottement est importante, comme on le sent en tirant sur l'archet : le modèle ci-dessus conduirait à un apport substantiel d'énergie à la corde, ce qui est manifestement faux puisqu'on sait que la corde dissipe très peu d'énergie. En fait, un léger glissement accompagne le régime d'adhérence. À très faible vitesse (quasi adhérence), la friction augmente très rapidement avec la vitesse. En régime de glissement, la friction diminue au contraire, la colophane se comportant comme un lubrifiant. Elle semble subir une fusion de surface lors du glissement (J. Woodhouse). La caractéristique de friction passe donc par un maximum très marqué, pour une vitesse très basse. Les points de fonctionnement de l'entretien à l'archet se placent à force égale, l'un à très faible vitesse (adhérence imparfaite), l'autre en grande vitesse (glissement). L'apport d'énergie peut alors être globalement quasi nul, la corde cédant au cours du glissement l'énergie que l'archet lui a donnée au cours de la quasi-adhérence.

#### 4.1.6.2. *Régime adhérence-glissement, régime de glissement continu*

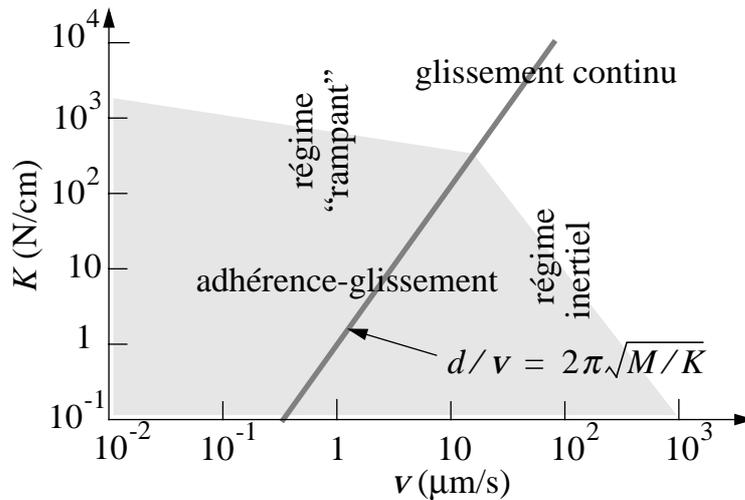
Dans un modèle plus développé, on reprend la description ci-dessus mais en exerçant la force au moyen d'un ressort dont l'extrémité est animée d'une vitesse constante. Deux types de comportement sont alors possibles selon la valeur de la force exercée et selon la vitesse de traction.

- Cas n°1 : adhérence-glissement

On a des oscillations de relaxation. Ce type d'auto-oscillations est très général. Ses manifestations vont du grincement de porte jusqu'aux secousses du tremblement de terre, en passant par les traces ondulées d'un outil de fraisage qui vibre.

- Cas n°2 : glissement continu

En augmentant la vitesse dans un frottement sec, on observe une transition vers un régime de glissement continu. Les études récentes effectuées par F. Heslot au Laboratoire de Physique de la Matière Condensée de l'École Normale Supérieure montrent que le diagramme de phase entre le comportement de glissement continu



**Figure 4.4.** Diagramme de phase du frottement sec (F. Heslot).

et d'adhérence-glisement se partage entre deux régimes de natures différentes.

• Régime "rampant" (creep)

Pour des vitesses inférieures au dixième de micromètre par seconde, le comportement est caractérisé par une longueur  $d$ , de l'ordre de la distance de fluage des aspérités de la surface (1  $\mu\text{m}$ , même ordre de grandeur pour le frottement bristol-bristol, l'écorce terrestre, ou un métal). Le temps  $t_{\text{rampant}} = d/v$  qui intervient dans le mécanisme est inversement proportionnel à la vitesse. La force de frottement diminue quand la vitesse augmente. La transition entre le comportement adhérence-glisement et glissement continu montre une bifurcation du type Hopf supercritique (voir bifurcations, chapitre 5).

• Régime inertiel

Pour des vitesses d'une dizaine de micromètres par seconde, le comportement est relativement indépendant de la nature des matériaux et de l'état de surface, mais il dépend des conditions de l'expérience. Le comportement est caractérisé par un temps  $t_{\text{inertiel}} \approx 2\pi\sqrt{M/K}$ , ( $K$  raideur du ressort de traction et  $M$  masse en mouvement). La force de frottement augmente avec la vitesse. La transition entre le comportement adhérence-glisement et glissement continu montre une bifurcation du type souscritique (voir bifurcations, chapitre 5).

La ligne de séparation entre les deux régimes est donnée par

$$d/v = 2\pi\sqrt{M/K}$$

Dans le régime de "grande" vitesse,  $t_{\text{inertiel}}$  devient plus long que  $t_{\text{rampant}}$  : c'est ce temps long qui caractérise le comportement, démontrant le caractère inertiel de ce régime.

On remarquera que, à travers tout ce qui les sépare, frottement sec et frottement

fluide montrent une similitude globale : régime inertiel à vitesses élevées, régime “rampant” ou laminaire à faibles vitesses. Mais l’échelle des vitesses diffère.

Ces considérations ouvrent quelques pistes sur le frottement entre spires dans une corde filée (voir [4.90]). Elles éclairent également les observations faites sur la colophane. En régime de quasi-adhérence, la force de frottement augmente avec la vitesse : le frottement sec est donc du type *glissement continu en régime inertiel*. En régime de glissement de l’archet, la force de frottement diminuant quand la vitesse augmente, ce type de frottement ne peut pas être un frottement sec (en effet, il faudrait être dans le régime “rampant”, mais celui-ci n’existe qu’à des vitesses inférieures au régime précédent). Cette remarque vient en appui des observations qui suggèrent une fusion de surface de la colophane quand l’archet glisse. On voit que la colophane est un matériau aux caractéristiques complètement atypiques.

#### 4.1.7. Viscoélasticité

Un solide élastique est un milieu idéalisé non dissipatif : les transformations qu’il subit sont thermodynamiquement réversibles. Dans la réalité, la déformation se produit avec un léger retard sur la contrainte, le système n’est plus invariant par renversement du temps, une irréversibilité s’introduit, donc une dissipation.

Prenons le cas d’une contrainte uniaxiale. En élasticité (réversible) nous avons défini un module d’Young (réel) :

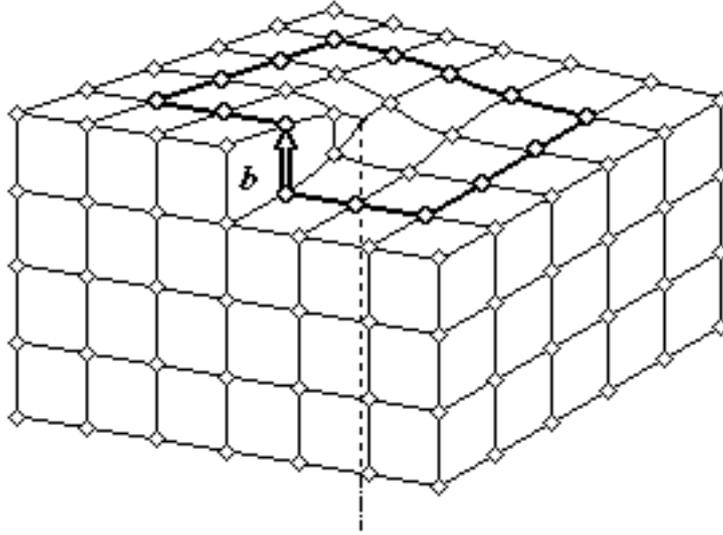
$$\tau = \tau_o \exp(-j\omega t) \quad \rightarrow \quad e = e_o \exp(-j\omega t) \quad E = \frac{\tau}{e} = \frac{\tau_o}{e_o} \quad [4.47]$$

En viscoélasticité (irréversibilité petite), on définit un module d’Young complexe en introduisant un retard de phase  $\delta_{ve}$  de la déformation sur la contrainte :

$$\tau = \tau_o \exp(-j\omega t) \quad \rightarrow \quad e = e_o \exp[-j(\omega t - \delta_{ve})] \quad E_{ve} = \tau/e \quad [4.48]$$

$$E_{ve} = (\tau_o/e_o) \exp(-j\delta_{ve}) \approx E(1 - j\delta_{ve}) \quad [4.49]$$

On a donc un angle de pertes viscoélastiques  $\delta_{ve}$ , très petit, exprimé en radians, de l’ordre de  $10^{-2}$  pour des nylons à  $10^{-3}$  pour des métaux (plus petit encore pour l’aluminium et le duralumin). Les métaux sont des assemblages de cristaux séparés par des *joints de grains*. Le déplacement au niveau cristallin d’un grand nombre de *dislocations*, qui sont des lignes de défaut dans la régularité du réseau cristallin, se traduit à l’échelle macroscopique par une déformation. Les mouvements des dislocations sont entravés par la présence de défauts ponctuels (impuretés métalliques) ou par la présence de dislocations voisines en trop grand nombre. Dans le domaine



**Figure 4.5.** *Dislocation (dessin A. Watzky).*

des fréquences audibles, l'angle de pertes viscoélastiques est donc très sensible à la métallurgie et diminue si on introduit des impuretés ou si on écrouit le métal par traction ou par martelage. Pour les métaux,  $\delta_{ve}$  est indépendant de la fréquence dans toute la gamme audible. En élasticité, nous avons également utilisé le module de torsion :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Ce module  $G$  a lui aussi un angle de pertes viscoélastiques. Compte tenu de l'imprécision des déterminations expérimentales sur l'angle de pertes (avoir l'ordre de grandeur n'est déjà pas mal), nous négligerons l'effet de la partie imaginaire de  $\nu$  et nous prendrons pour  $G$  le même angle de pertes viscoélastiques que pour  $E$  :

$$G_{ve} = G(1 - j\delta_{ve}) \quad [4.50]$$

En reportant ces valeurs complexes dans l'expression obtenue pour la fréquence d'un mode, on en tire le facteur de qualité et le temps de décroissance. Pour une plaque ou une verge en flexion, pour l'onde de compression dans une corde, on a :

$$\omega \propto (E_{ve})^{1/2} \propto 1 - j\delta_{ve}/2 \quad Q^{-1} = \delta_{ve} \quad [4.51]$$

Pour les modes de torsion d'une corde, on a de même :

$$\omega \propto (G_{ve})^{1/2} \propto 1 - j\delta_{ve}/2 \quad Q^{-1} = \delta_{ve} \quad [4.52]$$

Pour tous les types de vibrations où la force de rappel découle de l'élasticité, l'angle de pertes produit une correction directement sur la pulsation, le facteur de qualité dû à la viscoélasticité est simplement l'inverse de l'angle de pertes (indépendant de la fréquence pour les métaux et alliages). Le cas de la corde en flexion est plus compliqué car la principale force de rappel ne provient pas de l'élasticité : la correction sur la pulsation est indirecte, ce cas sera traité un peu plus loin.

#### 4.1.8. Thermoélasticité

Une autre cause d'irréversibilité thermodynamique vient perturber les déformations élastiques. Au cours de ces déformations, certaines parties du milieu élastique se trouvent comprimées donc s'échauffent. D'autres se trouvent étirées donc refroidies. La conductivité thermique du milieu élastique n'étant pas nulle, il existe un transfert de chaleur de la zone échauffée à la zone refroidie. Nous suivons la démarche introduite par Zener.

Pour simplifier la géométrie, nous allons considérer une corde de section rectangulaire. Quand la corde subit un déplacement transversal  $y(x, t)$ , l'allongement d'un côté de la fibre moyenne entraîne un refroidissement, de l'autre il y a échauffement. La fluctuation de température  $\theta(z, x, t)$  est fonction de la cote  $z$  par rapport à la fibre moyenne à l'intérieur de la corde. Le transfert de chaleur se fait selon  $Oz$ . La quantité de chaleur apportée par conduction thermique, par unité de temps et de volume, est semblable à [4.16] :

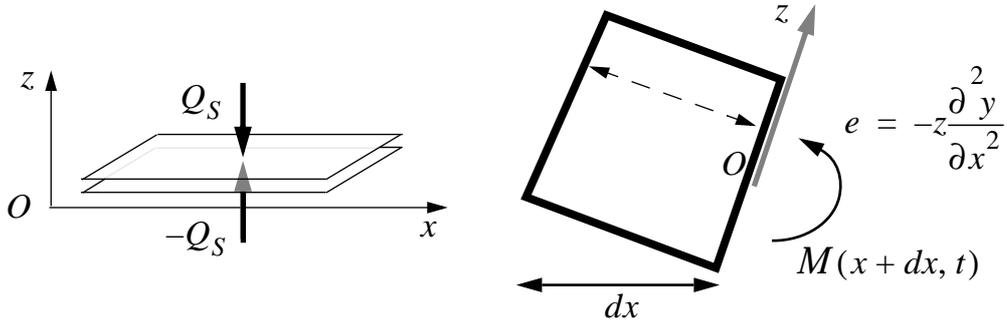
$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2}{\partial z^2} \theta(z, x, t) \quad [4.53]$$

L'allongement de la fibre de cote  $z$  a été calculé en [3.38]. Il est donné par :

$$e = -z \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad [4.54]$$

Si la transformation était adiabatique, elle entraînerait un échauffement :

$$\theta = -\beta e \quad \text{avec} \quad \beta = - \left. \frac{d\theta}{de} \right|_{\text{adia}} > 0 \quad [4.55]$$



**Figure 4.6.** *Thermoélasticité.*

correspondant à une quantité de chaleur

$$Q_2 = c_P \theta = c_P \beta z \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad [4.56]$$

Au total, par unité de temps et de volume, la chaleur apportée s'écrit donc :

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} + \frac{\partial Q_2}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - j \omega c_P \beta z \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad [4.57]$$

Cette chaleur sert à modifier la température (à pression constante) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (Q_1 + Q_2) = c_P \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad [4.58]$$

Le bilan de chaleur prend donc la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta(z, x, t) - \frac{\lambda}{c_P} \frac{\partial^2 \theta(z, x, t)}{\partial z^2} = -j \omega \beta z \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \quad [4.59]$$

Dans le cas particulier où la courbure est nulle, nous avons une équation de diffusion dont les solutions sont semblables à celles de [4.20] :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = \text{cte} \exp(\pm \kappa_{te} z) \quad \text{avec} \quad \kappa_{te}^2 = -j \frac{\omega c_P}{\lambda} \quad [4.60]$$

Pour notre corde en flexion, la solution cherchée est une fonction impaire de  $z$

du type suivant :

$$\theta(z,x,t) = \theta_o(x,t) \sinh \kappa_{te} z + \beta z \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad [4.61]$$

Il reste à déterminer  $\theta_o$  par la condition aux limites. Comme la corde n'échange avec l'air ambiant qu'une quantité négligeable de chaleur, l'apport de chaleur à la surface doit être nul, ce qui implique la condition aux limites suivante :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=a} = 0 \quad [4.62]$$

(nous notons  $z = \pm a$  les limites du ruban constituant la corde). Il en découle l'expression ci-dessous pour la variation de température :

$$\theta(z,x,t) = \left( z - \frac{\sinh \kappa_{te} z}{\kappa_{te} \cosh \kappa_{te} a} \right) \beta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad [4.63]$$

L'échauffement  $\theta(z,x,t)$ , fonction de  $z$ , va entraîner une correction du moment fléchissant, donc du module d'Young. L'échauffement développe une contrainte normale le long de  $Ox$ . En effet, cette contrainte apparaît si l'on chauffe un élément de corde en immobilisant le reste de la corde en aval (abscisses croissantes, action de la partie aval sur la partie amont). La contrainte est donnée par :

$$\tau = -\alpha \theta \quad \text{avec} \quad \alpha = \left. \frac{d\tau}{d\theta} \right|_{\text{contr}} \quad [4.64]$$

où  $\alpha$  est la contrainte normale engendrée le long de  $Ox$  par degré d'échauffement lorsque les contraintes normales sont maintenues constantes sur les autres faces. Pour une fibre de section  $dS$ , il en résulte un moment fléchissant :

$$\delta M_{te} = -\tau_z dS = \alpha \theta_z dS \quad [4.65]$$

en comptant positives les rotations dans le sens trigonométrique.

En sommant sur la section, on voit qu'au moment fléchissant élastique

$$M_e = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad [4.66]$$

s'ajoute la contribution thermoélastique suivante :

$$M_{te} = \alpha\beta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} l \int_{-a}^a \left( z - \frac{\sinh \kappa_{te} z}{\kappa_{te} \cosh \kappa_{te} a} \right) z dz = \alpha\beta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \left( \frac{2la^3}{3} - \frac{2l}{\kappa_{te} \cosh \kappa_{te} a} I_1 \right)$$

On a :

$$I_1 = \int_0^a z \sinh \kappa_{te} z dz = \frac{z \cosh \kappa_{te} z}{\kappa_{te}} \Big|_0^a - \frac{\sinh \kappa_{te} z}{\kappa_{te}^2} \Big|_0^a = \frac{\kappa_{te} a \cosh \kappa_{te} a - \sinh \kappa_{te} a}{\kappa_{te}^2}$$

Il vient finalement :

$$M_{te} = \alpha\beta I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \left[ 1 - \frac{3}{(\kappa_{te} a)^2} \left( 1 - \frac{1}{\kappa_{te} a} \tanh \kappa_{te} a \right) \right] \quad [4.67]$$

$$\text{avec } I = \frac{2la^3}{3} = \frac{lh^3}{12} \quad h = 2a \text{ épaisseur du ruban} \quad [4.68]$$

On peut conserver les équations de l'élasticité en modifiant la valeur de  $E$  :

$$E_{te} = (M_e + M_{te}) \left( I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^{-1} \quad [4.69]$$

$$E_{te} = E \left[ 1 + \frac{\alpha\beta}{E} - \frac{3\alpha\beta}{E} (\kappa_{te} a)^{-2} \left( 1 - \frac{1}{\kappa_{te} a} \tanh \kappa_{te} a \right) \right] \quad [4.70]$$

Dans la pratique,  $\alpha\beta$  est de l'ordre du pour cent et la correction sur la partie réelle de  $E$  est négligeable. On ne garde que la partie imaginaire en écrivant :

$$E_{te} = E(1 - j\delta_{te}) \quad [4.71]$$

Explicitons cette partie imaginaire. Il vient :

$$\kappa_{te} a = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \frac{h}{2} \sqrt{\frac{\omega c_P}{\lambda}} = (1-j)X \quad \text{en posant} \quad X = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{\pi f c_P}{\lambda}} \quad [4.72]$$

Or :

$$(\kappa_{te} a)^{-2} = j \frac{1}{2X^2} \quad [4.73]$$

On trouve finalement (angle de pertes exprimé en radians) :

$$\delta_{te} = \frac{\alpha\beta}{E} y(X) \quad \text{avec} \quad y(X) = \frac{3}{2X^2} \left[ 1 - \operatorname{Re} \left( \frac{1}{(1-j)X} \tanh(1-j)X \right) \right] \quad [4.74]$$

La forme de la courbe  $y(X)$  est donnée ci-dessous, avec  $X = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{\pi f c_P}{\lambda}}$ .

Il existe une fréquence  $f_{te}$  pour laquelle les pertes sont maximales.

• Régime isotherme

Pour  $f \ll f_{te}$ , l'angle de perte tend vers 0 :  $\delta_{te} \rightarrow 0$ . Dans ce régime, on remarque que  $\kappa_{te} \rightarrow 0$  ce qui implique, d'après [4.63],  $\theta(z, x, t) \rightarrow 0$ . La chaleur a le temps de s'échanger complètement à travers la corde, nous sommes en régime isotherme (réversible) et les pertes s'annulent.

• Régime adiabatique

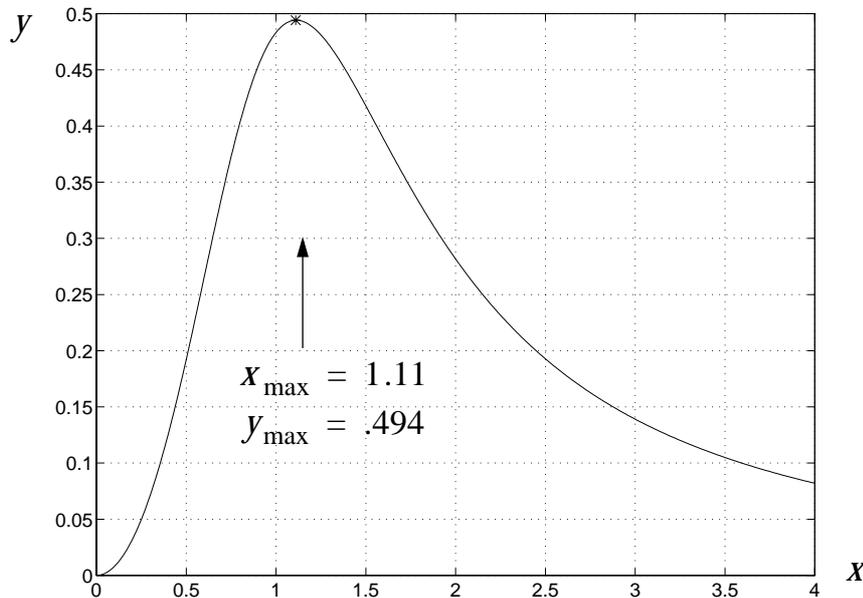
Pour  $f \gg f_{te}$ , l'angle de perte diminue et tend vers zéro à hautes fréquences :  $\delta_{te} \rightarrow 0$ . On remarque que  $\kappa_{te} \rightarrow \infty$  et que, d'après [4.63],  $\theta$  est gouvernée par le régime adiabatique (réversible) : la chaleur n'a pas le temps de s'échanger à travers la corde.

• Régime le plus dissipatif

À la limite entre le régime isotherme et le régime adiabatique, pour la fréquence  $f = f_{te}$  correspondant au maximum de la courbe  $y(X)$ , le régime le plus dissipatif est atteint.

Numériquement, ce maximum correspond à :

$$f_{te} = \frac{4X_{\max}}{d^2} \frac{\lambda}{\pi c_P} \approx \frac{1,6\lambda}{c_P d^2} \quad \delta_{te} = \frac{\alpha\beta}{E} y(X_{\max}) \approx \frac{0,5\alpha\beta}{E} \quad [4.75]$$



**Figure 4.7.** Angle de pertes thermoélastiques (adimensionnalisé).

Par des arguments thermodynamiques, Zener a montré que :

$$\frac{\alpha\beta}{E} = \frac{1}{3}(1 - 2\nu)\frac{c_P - c_V}{c_V} \quad [4.76]$$

Dans les vibrations longitudinales, la distance  $d$  sur laquelle la chaleur s'échange devient la longueur de la corde, ou  $L/n$  pour les modes supérieurs. La fréquence  $f_{te}$  tombe donc très en dessous des fréquences audibles et les pertes thermoélastiques sont complètement négligeables. Dans les vibrations de torsion, le cisaillement n'entraînant pas de changement de volume, ces pertes sont nulles.

La thermoélasticité n'apporte en général, comme nous le verrons sur les cordes, qu'une petite correction aux mécanismes prépondérants que sont la viscoélasticité et la viscosité de l'air. Pour les matériaux non métalliques, les pertes thermoélastiques sont très généralement négligeables. Cette conclusion diffère de l'opinion communément admise à l'époque où Zener a modélisé la thermoélasticité.

#### 4.1.9. Remarque sur les frottements

Nous avons décrit les frottements grâce à des constantes ( $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $\delta_{ve}$ ,  $\delta_{te}$  etc...), mesurables expérimentalement.   l'échelle microscopique, les lois de la nature sont réversibles : la mécanique statistique permet en principe de calculer ces constantes à partir des principes premiers.

## 4.2. Modes propres dans les instruments à cordes

Pas moins de six mécanismes différents d'amortissement sont toujours actifs simultanément dans les instruments à cordes. Les vibrations mécaniques des cordes sont amorties par transfert d'énergie mécanique de la corde à la table d'harmonie au moyen du chevalet, fabrication de chaleur dans l'air par frottement fluide, fabrication de chaleur dans la corde par viscoélasticité et thermoélasticité. Le rayonnement acoustique de la corde est négligeable. Quant à la table d'harmonie, conçue pour transférer de l'énergie acoustique par rayonnement, elle dégrade également, comme la corde, de l'énergie mécanique en chaleur par frottement fluide dans l'air (régime turbulent, inertiel), par viscoélasticité et par thermoélasticité. En plus de ces six mécanismes s'ajoutent éventuellement des effets structurels tels que le frottement sec des spires adjacentes du trait si la corde est filée, ou du frottement sec des fibres entre elles si la corde possède une structure fibreuse (boyaux com-mis).

Nous allons considérer un modèle linéaire de vibrations transversales planes de la corde, incluant les frottements dans l'air par une résistance mécanique (calculée en [4.39]), la viscoélasticité et la thermoélasticité par des angles de perte sur le module d'Young (voir en [4.49], [4.71] et [4.74]), ainsi qu'un couplage à la table d'harmonie décrit par une admittance transversale non nulle au chevalet (selon  $Oy$  : nous supposons nuls tous les autres éléments du tenseur admittance). Nous supposons de plus la corde en appuis simples au sillet et au chevalet.

Nous considérons le déplacement, la vitesse transversale ainsi que l'effort tranchant, exercés par la partie amont de la corde (abscisses décroissantes) sur la partie aval :

$$\{y(x, t), u(x, t), f(x, t)\} \quad [4.77]$$

Cet effort tranchant est l'opposé de celui que nous avons calculé en [3.43] :

$$f = -T_o \frac{\partial y}{\partial x} + E_c I \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \quad [4.78]$$

Nous avons donc deux équations couplées reliant la vitesse et l'effort tranchant :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -T_o \frac{\partial u}{\partial x} + E_c I \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad [4.79]$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x} = \rho_L \frac{\partial u}{\partial t} + R_L u = \rho_L^i \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \rho_L^i = \rho_L \left( 1 + j \frac{R_L}{\rho_L \omega} \right) \quad [4.80]$$

Nous connaissons les modes propres pour des conditions aux limites d'appui simple à chaque extrémité, avec admittance nulle au sillet en  $x = 0$  :

$$u(x, t) = u_o \sin kx \exp(-j\omega t) \quad [4.81]$$

Il reste à tenir compte de l'admittance finie au chevalet en  $x = L$  :

$$\{x = L\} \rightarrow \left\{ Y(L) = \frac{u(L, t)}{f(L, t)} = Y_{ch} \right\} \quad [4.82]$$

Pour ce faire, nous explicitons tout d'abord l'effort tranchant à partir de la vitesse [4.81] au moyen de l'équation [4.80] :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = j\rho_L \dot{\omega} u_o \sin kx \exp(-j\omega t)$$

$$f = -j \frac{\rho_L \dot{\omega}}{k} u_o \cos kx \exp(-j\omega t) \quad [4.83]$$

Nous en déduisons l'expression de l'admittance mécanique en chaque point :

$$Y(x) \approx j \frac{1}{\rho_L c_t'} \tan kx \quad \text{avec} \quad c_t' = \frac{\omega}{k} \quad \begin{array}{l} \text{(vitesse de phase} \\ \text{dans la corde)} \end{array} \quad [4.84]$$

La valeur en  $x = L$  détermine les valeurs possibles du nombre d'onde. En supposant très petite la perturbation apportée à la corde par le chevalet, il vient :

$$\{\rho_L c | Y_{ch} | \ll 1\} \rightarrow \{|\tan kL| \ll 1\} \quad [4.85]$$

$$k_n L \approx n\pi - j\rho_L c_t' Y_{ch} \approx n\pi - j\rho_L c_t' Y_{ch} \quad \text{avec} \quad c_t = \sqrt{T_o / \rho_L}$$

*Définition* : par analogie avec les ondes acoustiques dans un tuyau cylindrique (voir [1.53]), on appelle  $\rho_L c_t'$  *impédance mécanique caractéristique de la corde*.

Remarquons que l'influence des perturbations propres à la corde (raideur, frottement dans l'air) disparaît dans l'expression du nombre d'onde :

$$k_n \approx \frac{n\pi}{L} \left( 1 - j \frac{\rho_L c_t' Y_{ch}}{L} \frac{L}{n\pi} \right) \quad [4.86]$$

Cette remarque nous évitera des calculs pénibles quand nous traiterons le cas des instruments à vent : pour déterminer les corrections sur  $k$  introduites par les conditions aux limites, on peut négliger toutes les perturbations propres à la ligne de transmission elle-même (ci-dessus la correction de raideur et la perturbation de l'air). Notons que  $k$  n'est plus réel dès que  $Y_{ch}$  n'est plus imaginaire pure, c'est-à-dire dès que de l'énergie est transmise à la table d'harmonie.

On obtient la relation de dispersion au moyen du calcul déjà fait en [3.53] :

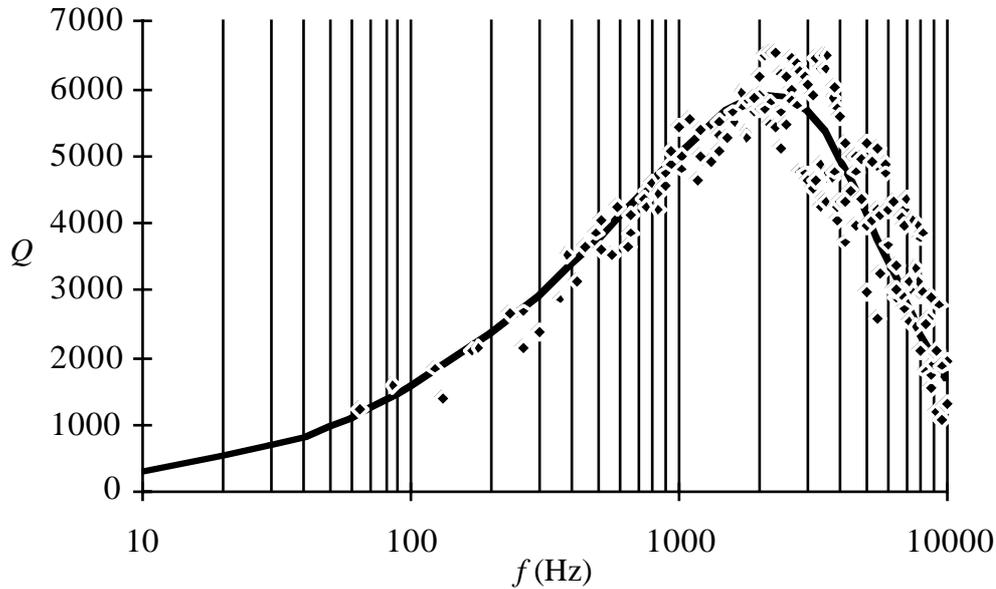
$$\omega = \left[ \frac{T_o}{\rho_L'} \right]^{1/2} k \sqrt{1 + \frac{E_c I}{T_o} k^2} \approx c_t k \left( 1 - j \frac{R_L}{2\rho_L \omega} + \frac{E_c I}{2T_o} k^2 \right)$$

En reportant les valeurs possibles du nombre d'onde données par [4.86], on obtient les valeurs de la pulsation complexe, qui déterminent les fréquences des modes propres du système mécanique et les facteurs de qualité :

$$\omega_n = 2\pi n f_o \left[ 1 + \frac{2\pi^2 E I \rho_L}{T_o^2} (n f_o)^2 + \frac{T_o}{2\pi L} \text{Im} Y_{ch} \frac{1}{n f_o} \right] \left( 1 - j \frac{Q_n^{-1}}{2} \right) \quad [4.87]$$

$$Q_n^{-1} = \frac{R_L}{2\pi \rho_L} \frac{1}{n f_o} + \frac{4\pi^2 E I \rho_L}{T_o^2} (\delta_{ve} + \delta_{te}) (n f_o)^2 + \frac{T_o}{\pi L} \text{Re} Y_{ch} \frac{1}{n f_o} \quad [4.88]$$

Alors que dans les instruments à vent la justesse pose, comme nous le verrons, de délicats problèmes de facture, l'inharmonicité dans les instruments à cordes (corrections entre crochets dans [4.87]) est très faible. Nous avons négligé le rôle de l'entretien : l'apport d'énergie étant très faible, l'influence sur la justesse l'est également. L'ajustement de l'inharmonicité dans la facture du piano a été commenté. Le musicien ou l'accordeur agit sur  $T_o$  ou sur  $L$  (ou les deux à la fois). Pour la guitare, un problème de justesse se pose au facteur : l'enfoncement de la corde jusqu'à la frette, nécessité par le jeu, modifie la tension de la corde. Cette modification est différente pour deux cordes consécutives dont l'une est en nylon et l'autre métallique. L'inharmonicité due au chevalet n'est un vrai problème de facture que pour la *note du loup*, phénomène propre aux instruments à cordes frottées : la réaction de la caisse sur la corde rend alors l'émission incertaine. Hormis le cas des cordes frottées, la transmission d'énergie à la table ne peut devenir le terme prépondérant de perte si l'on souhaite une longue tenue de son. Un compromis est à trouver avec les deux autres termes de  $Q$  afin de concilier la puissance sonore et la durée du son. À basses fréquences, les pertes dans l'air sont prépondérantes. On



**Figure 4.8.** *Corde de clavecin : comparaison expérience-théorie.*

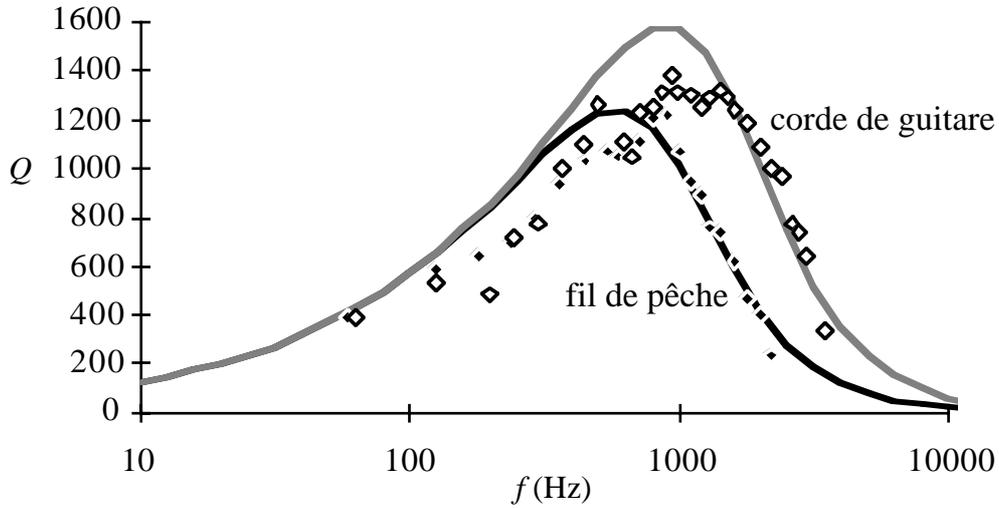
remarque la valeur asymptotique suivante, quand la fréquence tend vers zéro :

$$\{R_L \rightarrow 2\pi\mu\} \rightarrow \left\{ Q^{-1} \rightarrow \frac{\mu}{\rho_L} \frac{1}{f} \right\} \quad [4.89]$$

Pour cette valeur limite, le seul paramètre de la corde est sa masse par unité de longueur, les détails de facture n'interviennent pas. À hautes fréquences, les pertes viscoélastiques dominent ( $\delta_{te} \rightarrow 0$ ). Entre les deux, on observe que les cordes monofilament utilisées à des fins musicales ont un maximum très marqué de  $Q$  (amortissement minimum) dans la zone sensible de l'oreille. D'une façon générale, les pertes thermoélastiques sont négligeables devant les deux autres sauf lorsque la fréquence caractéristique thermoélastique tombe au voisinage de la fréquence où  $Q$  est maximum : elles apportent alors une correction. À hautes fréquences, les détails technologiques de fabrication de la corde modifient les pertes. Pour les cordes métalliques, l'écroutissage, en augmentant le nombre de dislocations, agit sur  $\delta_{ve}$  ainsi que sur  $\delta_{te}$  par l'intermédiaire de la conductivité thermique. Quand un instrumentiste monte une corde neuve obtenue par tréfilage à chaud, donc peu écroutie au départ, celle-ci "se fait" par écroutissage sur l'instrument : la corde s'allonge tout d'abord, des dislocations s'introduisent, les pertes par frottements internes viscoélastiques et thermoélastiques diminuent.

Entre cordes, des différences dans la position et la valeur du maximum de  $Q$  correspondent à des différences audibles : on voit ainsi ce qui sépare un fil de pêche d'une corde de guitare, tous deux en nylon.

Dans les cordes filées, un mécanisme supplémentaire de pertes existe, dû au frot-



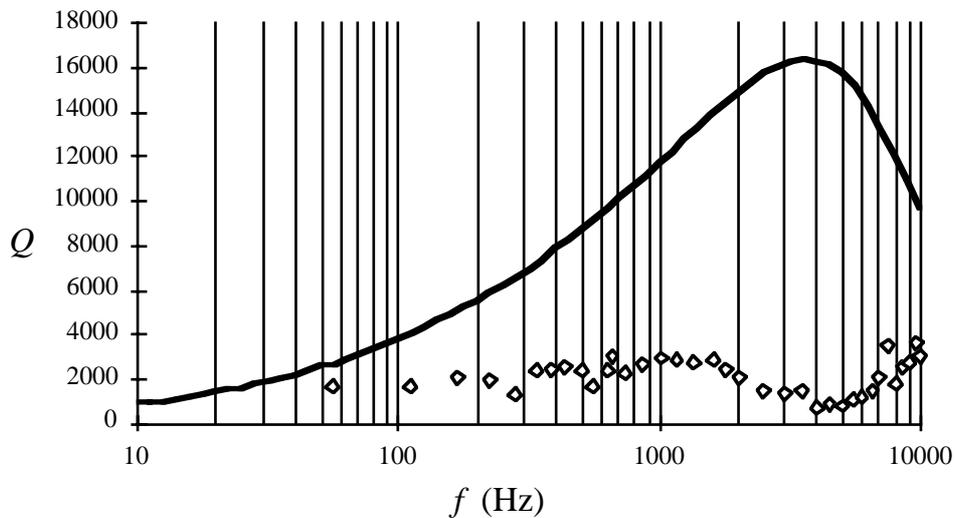
**Figure 4.9.** Comparaison de deux cordes en nylon.

tement des spires consécutives entre elles. On peut rendre compte de ce mécanisme en introduisant un retard de la pente de la corde sur l'effort tranchant :

$$\left\{ f_P = -T_o \frac{\partial y}{\partial x} \right\} \rightarrow \left\{ f_P = -T_o (1 - j\delta_{sp}) \frac{\partial y}{\partial x} \right\} \quad [4.90]$$

La correction qui en résulte sur la partie imaginaire de la pulsation se traduit par une contribution du frottement entre spires au facteur de qualité :

$$Q_{sp}^{-1} = \delta_{sp} \quad [4.91]$$



**Figure 4.10.** Frottements secs dans une corde filée.

L'étude expérimentale montre qu'il existe une fréquence de résonance pour laquelle cet angle de perte devient important, alors que le phénomène disparaît au dessus et au-dessous de cette fréquence. L'interprétation physique est que le glissement des spires l'une contre l'autre s'accompagne d'un frottement sec. Supposons que l'on soit dans le régime inertiel : une spire doit vaincre la rigidité du ressort constitué par les spires voisines. Le frottement est maximum à la fréquence propre de ce système masse-ressort.

Pour certaines cordes à texture fibreuse, certaines cordes en boyau commis par exemple, des frottements secs entre fibres introduisent une dissipation importante à basses fréquences. En facilitant le glissement des fibres (boyau commis à fibres non collées entre elles, fabrication à l'ancienne), le temps inertiel caractéristique du frottement augmente : si la fréquence correspondante devient plus basse que le fondamental, la dissipation diminue fortement (mesures Ch. Besnainou).

### 4.3. Couplage fluide-structure : rayonnement des instruments à cordes

#### 4.3.1. Fréquence de coïncidence

La table d'harmonie est une structure mécanique complexe que l'on peut étudier par analyse modale : on peut déterminer les modes propres et leurs amortissements. Cependant, la limite en fréquence de telles mesures reste relativement basse, de l'ordre de 3kHz. Connaissant à toute fréquence l'admittance au chevalet et la force exercée par la corde, on peut en principe évaluer la vitesse en chaque point de la table donc le rayonnement. L'assimilation brutale à un piston bafflé permet un premier abord simple dans la limite basses fréquences (en assimilant un mode sans ligne nodale à un piston).

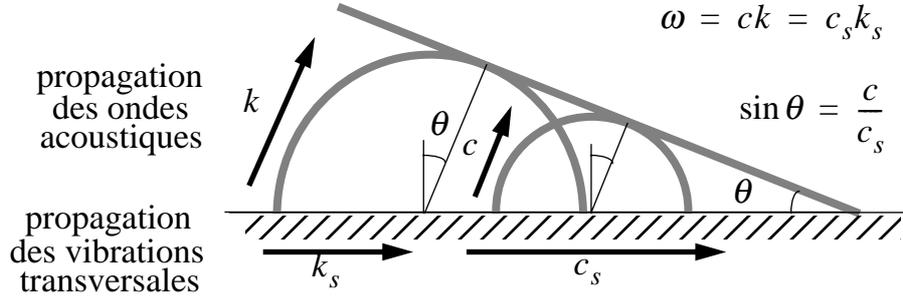
À hautes fréquences, les dimensions de la table d'harmonie deviennent grandes par rapport à la longueur d'onde, on peut appliquer l'approximation des rayons acoustiques. Assimilons la table à une plaque isotrope de dimensions infinies.

Quand une onde acoustique incidente et une onde réfléchie sont présentes dans le *milieu I* (air) et une onde transmise dans le *milieu II*, nous avons vu que les trois ondes en présence vérifient les égalités suivantes :

$$k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r = k_t \sin \theta_t \quad [4.92]$$

*Définition* : la valeur de cette constante le long de l'interface s'appelle la trace du vecteur d'onde.

On dit que ces trois ondes ont adapté leur trace le long de l'interface. Cette propriété résulte de la construction d'Huygens : on cherche l'enveloppe, à un instant donné, d'ondes sphériques qui ont été émises antérieurement en chaque point de



**Figure 4.11.** Rayonnement d'une plaque : construction d'Huygens.

l'interface et l'interférence est additive si cette adaptation de la trace est réalisée. Appliquons ce principe au couplage acoustique qui se produit avec les ondes transversales se propageant sur la table d'harmonie, excitées sous l'action de la force qu'exerce la corde vibrante, par l'intermédiaire du chevalet. L'effet est analogue au sillage d'un bateau, à l'onde de choc supersonique d'un avion ou à l'effet Cherenkov pour une particule élémentaire. Pour les ondes de flexion de nombre d'onde  $k_s$  dans la plaque on a :

$$\omega = \sqrt{\frac{K_S}{\rho_S}} k_s \quad K_S = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad [4.93]$$

(en notant  $h$  l'épaisseur de la plaque,  $\rho_S$  sa masse par unité de surface,  $K_S$  sa raideur,  $E$  le module d'Young,  $\nu$  le coefficient de Poisson).

Comme la vitesse de phase de l'onde de flexion

$$c_s = \sqrt{\frac{K_S}{\rho_S}} \left( \omega \sqrt{\frac{\rho_S}{K_S}} \right)^{1/2} = \left( \frac{K_S}{\rho_S} \right)^{1/4} \sqrt{\omega} \quad [4.94]$$

augmente avec la fréquence, il existe une fréquence à partir de laquelle elle devient supérieure à la vitesse du son. Cette fréquence s'appelle *la fréquence de coïncidence* :

$$f_{\text{coïnc.}} = \frac{c^2}{2\pi \sqrt{K_S/\rho_S}} \quad c_s = c \quad [4.95]$$

Au-dessus de cette fréquence, l'émission acoustique se fait selon un angle

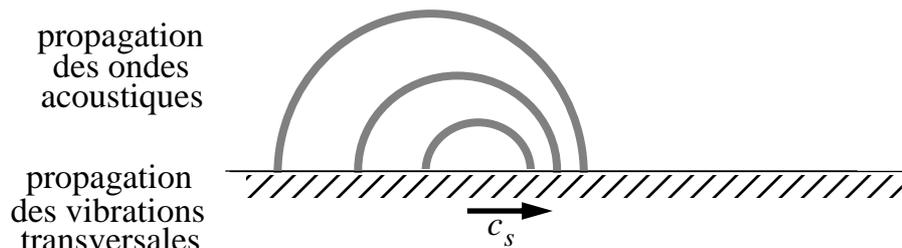
$$\theta = \text{asin} \left( \frac{c}{c_s} \right) \quad [4.96]$$

pour lequel l'adaptation des traces est réalisée, le long de la plaque, entre les ondes acoustiques et les ondes de flexion. L'émission est d'abord en incidence rasante pour  $f = f_{\text{coïnc.}}$ , puis de plus en plus redressée quand la fréquence augmente :  $f > f_{\text{coïnc.}}$ .

En dessous de cette fréquence, on ne peut réaliser l'adaptation de la trace et la construction d'Huyghens ne donne plus d'angle où les interférences soient additives : le rayonnement acoustique d'une plaque infinie devient nul en principe.

En pratique, une table d'harmonie n'est pas infinie, on n'a pas en présence une seule onde progressive mais un ensemble d'ondes stationnaires : les interférences destructrices entre zones d'émission voisines mais de polarité opposée entraînent une chute sensible de la puissance acoustique globale de la source. Pour avoir une bonne émission de l'aigu par la table, il faut une valeur relativement basse de la fréquence de coïncidence, donc d'après [4.95] une raideur  $K_S$  importante et une masse  $\rho_S$  faible. Le barrage de la table d'harmonie constitue un facteur important d'amélioration de ce problème. En effet, le long des barres, les interférences destructrices se trouvent annulées. On pourra consulter, sur ce sujet, l'article de Gideon Maidanik (Response of Ribbed Panels to Reverberant Acoustic Fields, JASA, **34**, p.809 (1962)). Il semble qu'une déformation relativement importante de la table soit parfois souhaitable, dans le clavecin par exemple. Le fait de voiler la coque que constitue la table introduit une ligne de raideur importante, dont on peut supposer qu'elle favorise le rayonnement en dessous de la fréquence de coïncidence, au même titre que le barrage (A. Caracciolo, C. Valette). Cependant, dans le clavecin, cette ligne de grande raideur ne se trouvant pas du même côté du chevalet dans la zone des cordes graves et des cordes aiguës, elle doit nécessairement croiser le chevalet : à l'endroit du croisement, la corde correspondante agit en un point très raide de la table et cette note sonne mal. On comprend, sur cet exemple, comment l'art du facteur consiste à trouver empiriquement les meilleurs compromis possibles entre des exigences contradictoires. Le barrage constitue un élément clé car il permet de varier les raideurs et les masses indépendamment les unes des autres (sur une plaque, raideur et masse sont liées).

On remarque, par ailleurs, que si la figure 4.12 représente maintenant l'émission sonore d'une source en mouvement à la vitesse  $c_s$ , la longueur d'onde  $\lambda$  est plus courte, donc la fréquence plus élevée, à l'avant de la source en mouvement qu'à



**Figure 4.12.** Régime subsonique  $c_s < c$ , intervalles de temps d'une période.

l'arrière : on en déduit le classique effet Doppler :

$$\lambda_{\mp} = \lambda_s \left( \frac{c \mp c_s}{c} \right) \quad f_{\mp} = f_s \frac{c}{c \mp c_s} \quad \text{où } \begin{array}{l} f_s \text{ fréquence de la source} \\ c \text{ vitesse du son} \end{array} \quad [4.97]$$

signe  $-$  quand la source se dirige vers l'observateur, signe  $+$  en sens inverse.

Le concept d'adaptation des traces et celui de coïncidence, qui en résulte, jouent un rôle essentiel dans tous les problèmes de rayonnement, notamment dans les applications industrielles, et aussi dans les problèmes de transparence des parois.

### 4.3.2. Transparence des parois

Cette notion est importante en acoustique des salles. Nous allons faire le raisonnement en incidence normale, mais il est facile à généraliser à une incidence quelconque. Nous allons calculer l'impédance ramenée de la paroi.

*Définition : on appelle impédance ramenée l'impédance qu'il faut mettre à la place de la paroi pour conserver le même effet sur l'onde incidente.*

Soit  $z$  l'abscisse à l'intérieur de la paroi d'épaisseur  $d$ ,  $z = 0$  la face soumise à l'onde incidente. Avec les notations habituelles (onde incidente et réfléchie),

$$Z_P = \left. \frac{p_i + p_r}{u_i + u_r} \right|_{z=0} \quad [4.98]$$

[4.98] exprime l'impédance ramenée de la paroi. Le coefficient de réflexion et celui de transmission de l'énergie valent :

$$r = \frac{Z_P - \rho c}{Z_P + \rho c} \quad T = \frac{4 \operatorname{Re} Z_P}{\rho c} \frac{1}{|1 + Z_P / (\rho c)|^2} \quad [4.99]$$

#### • Cas d'une paroi constituée d'un fluide sans pertes

En ce cas, l'impédance  $Z$  est réelle, le nombre d'onde  $k$  également. En amont de la paroi sont présentes l'onde incidente et l'onde réfléchie :

$$\{(p_i, u_i), (p_r, u_r)\} \quad \text{dans le milieu d'impédance } \rho c$$

À l'intérieur de la paroi, les réflexions successives ont pour résultat l'existence d'une onde progressive voyageant dans le sens des  $z$  croissant et d'une autre dans

le sens des  $z$  décroissants :

$$\{(p_+, u_+), (p_-, u_-)\} \quad \text{dans le milieu d'impédance } Z$$

En aval de la paroi, il reste une onde transmise :

$$\{p_t, u_t\} \quad \text{dans le milieu d'impédance } \rho c$$

On raccorde pressions et vitesses à l'interface de sortie. Il vient :

$$p_+(d) + p_-(d) = p_t \quad p_+(d)/Z - p_-(d)/Z = p_t/(\rho c) \quad [4.100]$$

$$p_+(d) = \frac{p_t}{2} \left( 1 + \frac{Z}{\rho c} \right) \quad p_-(d) = \frac{p_t}{2} \left( 1 - \frac{Z}{\rho c} \right) \quad [4.101]$$

On fait de même à l'interface d'entrée :

$$p_i + p_r = p_+(0) + p_-(0) \quad \frac{p_i}{\rho c} - \frac{p_r}{\rho c} = \frac{p_+(0)}{Z} - \frac{p_-(0)}{Z} \quad [4.102]$$

Entre l'entrée et la sortie, la propagation nous donne enfin :

$$p_+(d) = p_+(0) \exp(jkd) \quad p_-(d) = p_-(0) \exp(-jkd) \quad [4.103]$$

Il vient (compte tenu de [4.101]) :

$$Z_P = Z \frac{p_+(0) + p_-(0)}{p_+(0) - p_-(0)}$$

$$p_+(0) = \frac{p_t}{2} \left( 1 + \frac{Z}{\rho c} \right) \exp(-jkd) \quad p_-(0) = \frac{p_t}{2} \left( 1 - \frac{Z}{\rho c} \right) \exp(jkd)$$

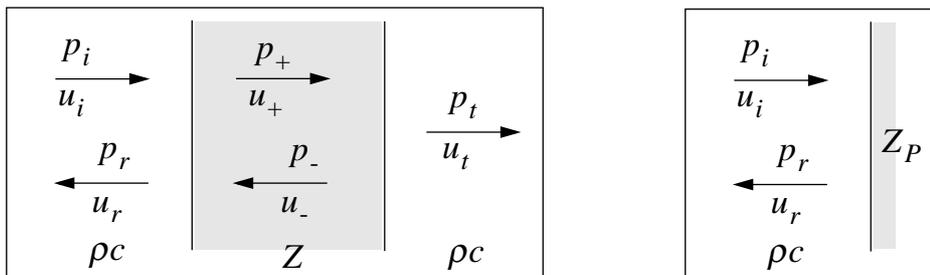


Figure 4.13. Transparence d'une paroi.

On en tire :

$$Z_P = Z \frac{(1 + Z/\rho c)\exp(-jkd) + (1 - Z/\rho c)\exp(jkd)}{(1 + Z/\rho c)\exp(-jkd) - (1 - Z/\rho c)\exp(jkd)}$$

On obtient l'expression suivante :

$$Z_P = Z \frac{\cos kd - j(Z/\rho c) \sin kd}{(Z/\rho c) \cos kd - j \sin kd} \quad [4.104]$$

Cette impédance est en général complexe. Il existe cependant des cas particuliers où elle devient réelle :

$$kd = n\pi \quad \rightarrow \quad \sin kd = 0 \quad \rightarrow \quad Z_P = \rho c \quad \rightarrow \quad T = 1 \quad [4.105]$$

Pour certaines épaisseurs et certaines fréquences, l'impédance ramenée est égale à  $\rho c$  et toute l'énergie acoustique est intégralement transmise à travers la paroi. Ce phénomène est classique en optique : on l'utilise pour réaliser la couche antireflet.

• Cas d'une paroi avec pertes

On introduit une partie imaginaire sur  $k$  pour tenir compte de l'amortissement :

$$k \rightarrow k(1 + j\delta) \quad p_{\pm}(z, t) = p_o \exp[jk(1 + j\delta)z] \exp(-j\omega t) \quad [4.106]$$

Si on néglige la réflexion sur la face de sortie, on trouve que la pression acoustique transmise diminue avec l'épaisseur  $d$  comme  $\exp(-k\delta d)$ . Dans le cas général, il vient

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\pm}(z, t) = - \frac{\pm j\omega(1 + j\delta)}{Z} p_{\pm}(z, t)$$

$$u_{\pm}(z, t) = - \frac{\pm j\omega(1 + j\delta)}{-j\omega Z} p_{\pm}(z, t)$$

$$Z \rightarrow Z(1 - j\delta) \quad [4.107]$$

Il convient donc d'introduire, de même que sur  $k$ , une partie imaginaire sur  $Z$  :

En tenant compte de ces valeurs complexes de  $k$  et de  $Z$ , on obtient l'expression de l'impédance ramenée. Il y a atténuation quelle que soit l'épaisseur.

Le même principe de calcul permet d'évaluer l'impédance ramenée du pavillon terminal d'un instrument à vent.

#### 4.4. Modes propres dans les instruments à vent

L'état non perturbé a été traité au chapitre 1. Il faut, maintenant, tenir compte de la viscosité et de la conductivité thermique de l'air, de la correction de forme du résonateur, de la présence de rayonnement et de celle d'un système exciteur. Le problème se présente d'une façon similaire à celui des cordes : nous allons simplifier grandement les choses en considérant séparément d'une part les perturbations sur la propagation, d'autre part celles sur les conditions aux limites.

##### 4.4.1. Propagation dans un pavillon en présence de la couche limite

En présence de viscosité, l'équation d'Euler se trouve modifiée. En tenant compte de [4.11] et de [4.8] on peut l'écrire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \left( 1 - \frac{\alpha_v}{r} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{avec} \quad \alpha_v = (1 + j) \sqrt{\frac{2\mu}{\omega\rho}} \quad [4.108]$$

L'équation de conservation est modifiée d'une part par la correction de forme du pavillon, et d'autre part par la correction du module de compressibilité de l'air due à la conductivité thermique. Une section  $\pi r^2(x)$  du pavillon est traversée par un flux d'air  $\pi r^2(x)u(x)$  par unité de temps. Dans un volume  $\pi r^2(x)dx$  constitué par une tranche d'épaisseur  $dx$  à partir de cette section, par unité de temps, la quantité d'air ajoutée est  $-\frac{\partial}{\partial x}[\pi r^2(x)u(x)]dx$ . Cet apport d'air induit une variation de la pression par unité de temps :

$$-\frac{1}{\pi r^2(x)dx} \frac{\partial}{\partial x}[\pi r^2(x)u(x)]dx = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial x}(r^2 u) = \frac{1}{\langle K \rangle} \frac{\partial p}{\partial t}$$

En tenant compte de [4.27] et de [4.21], l'équation de conservation peut alors s'écrire sous la forme modifiée suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{r'}{r}u = -\frac{1}{K} \left( 1 + \frac{\alpha_t}{r} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \quad [4.109]$$

$$\text{avec} \quad r' = \frac{dr}{dx} \quad \text{et} \quad \alpha_t = (1 + j)(\gamma - 1) \sqrt{\frac{2\lambda}{\omega c_P}} \quad [4.110]$$

On obtient l'équation des ondes pour  $p$  par élimination de  $u$  entre [4.108] et [4.109] :

$$\frac{1}{K} \left(1 + \frac{\alpha_t}{r}\right) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - 2 \frac{r'}{r} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{1}{\rho} \left[ \left(1 - \frac{\alpha_v}{r}\right) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\alpha_v r'}{r^2} \frac{\partial p}{\partial x} \right]$$

Cherchons une solution de la forme :

$$p(x,t) = p(x) \exp(-j\omega t) \quad [4.111]$$

$$\left(1 + \frac{\alpha_t}{r}\right) \frac{\omega^2}{c^2} p + \left(1 - \frac{\alpha_v}{r}\right) p'' + \frac{\alpha_v r'}{r^2} p' + 2 \frac{r'}{r} \left(1 - \frac{\alpha_v}{r}\right) p' = 0$$

L'équation de Helmholtz pour la pression, avec [4.111], prend la forme suivante :

$$p'' + 2 \frac{r'}{r} p' + \frac{\omega^2}{c^2} p = \frac{\alpha_v}{r} p'' + \frac{\alpha_v r'}{r^2} p' - \frac{\alpha_t}{r} \frac{\omega^2}{c^2} p \quad [4.112]$$

Nous avons regroupé au second membre les termes correctifs de la couche limite. Le premier membre prend une expression plus simple si l'on pose :

$$p(x) = \psi(x)/r(x) \quad [4.113]$$

$$p' = \frac{1}{r} \psi' - \frac{r'}{r} \psi \quad p'' = \frac{1}{r} \psi'' - 2 \frac{r'}{r} \psi' + \frac{2r'^2 - rr''}{r^3} \psi$$

Nous obtenons pour  $\psi$  l'équation suivante :

$$\psi'' + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{r''}{r}\right) \psi = \alpha_v \frac{1}{r} \psi'' - \alpha_v \frac{r'}{r^2} \psi' + \left(\alpha_v \frac{r'^2 - rr''}{r^3} - \alpha_t \frac{1}{r} \frac{\omega^2}{c^2}\right) \psi \quad [4.114]$$

Cette forme se prête à une approche de perturbation puisqu'il suffit, au second membre, d'utiliser pour  $\psi$  la forme en l'absence de couche limite.

**4.4.1.1. Influence d'une correction de forme sur les cylindres et les cônes**

En l'absence de couche limite,  $\psi$  est solution de l'équation de Salmon :

$$\psi'' + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{r''}{r} \right) \psi = 0 \quad [4.115]$$

Introduisons des modifications de forme du résonateur et posons :

$$\frac{r''(x)}{r(x)} = V + \delta V(x) \quad [4.116]$$

• 1er cas : cylindres et cône

C'est la famille  $V = \delta V(x) = 0$ . On retrouve les solutions classiques à partir de  $\psi = \psi_o \exp(\pm jkx)$

$$\text{cylindre : } p(x,t) = p_o \exp(\pm jkx) \exp(-j\omega t)$$

$$\text{cône : } p(x,t) = \psi_o \frac{\exp(\pm jkx)}{r(x)} \exp(-j\omega t) = p_o \frac{\exp(\pm jkx)}{kx} \exp(-j\omega t)$$

• 2ème cas : pavillons de Salmon

Cette famille  $V = \text{cte}$  comprend les pavillons sinusoïdaux, cathénoïdaux, leurs combinaisons linéaires appelées pavillons hyperboliques, et le pavillon exponentiel, tous solution de l'équation différentielle suivante :

$$r''(x)/r(x) = V \quad [4.117]$$

• Concavité tournée vers l'intérieur

Il s'agit du cas  $V < 0$ .

Il y a propagation à toute fréquence, avec dispersion :

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - V} \text{ réel,} \quad \text{relation de dispersion } \omega = ck \sqrt{1 + \frac{V}{k^2}} \quad [4.118]$$

• Concavité tournée vers l'extérieur

Il s'agit du cas  $V > 0$ . Il existe une fréquence de coupure  $f_p$  :

$$\omega_p = c\sqrt{V} = c\sqrt{\frac{r''}{r}} \quad f_p = \frac{c}{2\pi\sqrt{rr_{\text{ext}}}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{r_{\text{ext}}} = \frac{d^2 r}{dx^2} \quad [4.119]$$

En dessous de  $f_p$ ,  $k$  est imaginaire pur, on a des ondes évanescentes.

Au dessus, il y a propagation avec dispersion selon [4.118].

Hormis la famille des flûtes, beaucoup d'instruments à vent ont une concavité tournée vers l'extérieur. Cette forme est particulièrement marquée au pavillon terminal. Pour pouvoir jouer son rôle, il est nécessaire que le résonateur ait sa fréquence de coupure inférieure à la fréquence du fondamental. Le résonateur possède, de ce fait, une courbure extrêmement peu marquée, donc une valeur de  $V$  très faible.

$$\begin{array}{l} \text{condition nécessaire} \\ \text{pour avoir un résonateur} \end{array} : \quad f_p < f_o = \frac{c}{2L} \quad \rightarrow \quad r_{\text{ext}} > \frac{L^2}{\pi^2 r} \quad [4.120]$$

Le pavillon terminal, quand il existe, possède quant à lui une fonction de filtre. Il n'a d'intérêt que si sa fréquence de coupure se trouve dans la zone sensible de l'oreille, du côté de la fréquence limite de diffraction, qui constituerait le filtre de sortie si le pavillon était enlevé. Il n'affecte le spectre en enrichissant l'aigu que si sa fréquence de coupure est un peu inférieure à la fréquence limite de diffraction :

$$\begin{array}{l} \text{condition nécessaire pour} \\ \text{avoir un pavillon terminal} \end{array} : \quad \begin{array}{l} f_p \approx f_d = \frac{c}{2\pi r} \\ f_p \leq f_d \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} r_{\text{ext}} \approx r \\ r_{\text{ext}} \geq r \end{array} \quad [4.121]$$

La fonction de résonateur et la fonction de filtre étant deux fonctions incompatibles, on doit nécessairement passer de l'une à l'autre de façon brutale. L'observation de la courbure extérieure des instruments munis d'un pavillon terminal permet de situer facilement à quel endroit s'arrête le résonateur et commence le filtre.

• Cas des petites corrections de forme

C'est le cas  $|V| \ll \omega^2/c^2$ . En vertu des remarques précédente, c'est ce cas qui nous intéresse ci-après : la correction de forme est une petite perturbation par rapport à la forme cylindrique ou conique, en général une légère concavité tournée vers l'extérieur (clarinette, basson, saxophone etc...), parfois une légère concavité tournée vers l'intérieur (plusieurs instruments de la famille des flûtes).



En utilisant  $\psi_f$  comme solution approchée pour le second membre, il vient :

$$\psi'' + k_f^2 \psi = -\frac{\alpha_v}{r} \psi'' - \frac{\alpha_t}{r} \frac{\omega^2}{c^2} \psi \approx -\frac{\alpha_v}{r} \psi'' - \frac{\alpha_t}{r} \left( \frac{\omega^2}{c^2} - V \right) \psi \approx -\frac{\alpha_v + \alpha_t}{r} k_f^2 \psi$$

(on a utilisé le fait que le produit  $\alpha_t V$  est du second ordre). On trouve :

$$\psi'' + k_f^2 \left( 1 + \frac{\alpha_v + \alpha_t}{r} \right) \psi = 0 \quad [4.123]$$

La solution cherchée est donc du type  $\psi = \psi_o \exp(\pm jkx)$  avec

$$k^2 = k_f^2 \left( 1 + \frac{\alpha_v + \alpha_t}{r} \right) = \left( \frac{\omega^2}{c^2} - V \right) \left( 1 + \frac{\alpha_v + \alpha_t}{r} \right)$$

Nous sommes donc conduits à la relation de dispersion corrigée suivante :

$$\omega \approx ck \left( 1 + \frac{V}{2k^2} - \frac{\alpha_v + \alpha_t}{2r} \right) \quad [4.124]$$

Le premier terme correctif montre l'influence de la forme, le second celle de la viscosité et de la conductivité thermique de l'air.

#### 4.4.1.3. Relation de dispersion pour un cône corrigé avec couche limite

La démarche est analogue, mais le calcul sensiblement plus lourd. En effet, le second membre est maintenant fonction de  $x$  par l'intermédiaire de  $r(x)$  :

$$\psi'' + k_f^2 \psi \approx \frac{\alpha_v}{\theta x} \psi'' - \frac{\alpha_v}{\theta x^2} \psi' + \frac{\alpha_v}{\theta x^3} \psi - \frac{\alpha_t}{\theta x} \frac{\omega^2}{c^2} \psi$$

Nous avons utilisé dans le second membre, pour la géométrie, les expressions approchées suivantes (en notant  $2\theta$  l'angle du cône) :

$$r(x) \approx \theta x \quad r'(x) \approx \theta \quad r''(x) \approx 0$$

Partant de la solution connue sans couche limite

$$\psi_f = \psi_o \exp(\pm j k_f x) \quad k_f = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - V} \quad [4.125]$$

il vient, en remplaçant dans le second membre :

$$\psi'' + k_f^2 \psi \approx - \left( \frac{\alpha_v}{\theta x} k_f^2 \pm j \frac{\alpha_v}{\theta x^2} k_f - \frac{\alpha_v}{\theta x^3} + \frac{\alpha_t}{\theta x} k_f^2 \right) \psi \quad [4.126]$$

Cherchons des solutions sous la forme suivante :

$$\psi_+ = \psi_o \exp(j k_f x + \xi_+(x)) \quad \psi_- = \psi_o \exp(-j k_f x + \xi_-(x)) \quad [4.127]$$

En reportant dans [4.126] on obtient l'équation pour  $\xi(x)$  :

$$\begin{aligned} \psi''_{\pm} &= [(\pm j k_f + \xi'_{\pm})^2 + \xi''_{\pm}] \psi_{\pm} \\ \xi''_{\pm} \pm 2 j k_f \xi'_{\pm} + \frac{\alpha_v + \alpha_t}{\theta x} k_f^2 \pm j \frac{\alpha_v}{\theta x^2} k_f - \frac{\alpha_v}{\theta x^3} &= 0 \end{aligned} \quad [4.128]$$

Posons maintenant :

$$\xi_{\pm}(x) = \frac{\alpha_v}{2\theta x} + \varphi_{\pm}(x) \quad [4.129]$$

Nous sommes conduits à l'équation différentielle ci-dessous pour  $\varphi(x)$  :

$$\varphi''_{\pm} \pm 2 j k_f \varphi'_{\pm} + \frac{\alpha_v + \alpha_t}{\theta x} k_f^2 = 0 \quad [4.130]$$

Les solutions sont plus faciles à vérifier qu'à deviner (voir Nederveen et J. Ker-

gomard). Elles font intervenir les fonctions exponentielles intégrales et s'écrivent :

$$\varphi_+(x) = jk_f \frac{\alpha_v + \alpha_t}{2\theta} [\log(2k_f x) + E_+(x) \exp(-2jk_f x)] \quad [4.131]$$

$$\varphi_-(x) = -jk_f \frac{\alpha_v + \alpha_t}{2\theta} [\log(2k_f x) + E_-(x) \exp(2jk_f x)] \quad [4.132]$$

où nous avons posé

$$E_+(x) = \int_x^\infty \frac{\exp(2jk_f z)}{z} dz \quad E_-(x) = \int_x^\infty \frac{\exp(-2jk_f z)}{z} dz \quad [4.133]$$

On en déduit :

$$\psi_+ = A \exp \left[ jk_f x + \frac{\alpha_v}{2\theta x} + \varphi_+(x) \right] \quad [4.134]$$

$$\psi_- = B \exp \left[ -jk_f x + \frac{\alpha_v}{2\theta x} + \varphi_-(x) \right] \quad [4.135]$$

Pour obtenir l'onde stationnaire convenable, il faut trouver la combinaison linéaire de  $\psi_+$  et  $\psi_-$  qui élimine les parties imaginaires introduites lors du calcul :

$$\varphi_+ = \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2} + \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2} \quad \varphi_- = \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2} - \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2}$$

$$\varphi_+ = -k_f \frac{\alpha_v + \alpha_t}{2\theta} q(x) + jk_f \frac{\alpha_v + \alpha_t}{2\theta} [\log(2k_f x) + g(x)]$$

$$\varphi_- = -k_f \frac{\alpha_v + \alpha_t}{2\theta} q(x) - jk_f \frac{\alpha_v + \alpha_t}{2\theta} [\log(2k_f x) + g(x)]$$

Nous avons posé :

$$\begin{aligned}
 q(x) &= \frac{E_+(x)\exp(-2jk_f x) - E_-(x)\exp(2jk_f x)}{2j} \\
 g(x) &= \frac{E_+(x)\exp(-2jk_f x) + E_-(x)\exp(2jk_f x)}{2} \\
 G(x) &= \log(2k_f x) + g(x)
 \end{aligned}
 \tag{4.136}$$

L'onde stationnaire  $\psi$  est donc de la forme suivante ( $\varphi$  étant une phase) :

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &= \psi_o \exp\left[\frac{\alpha_v}{2\theta x} - k_f \frac{\alpha_v + \alpha_t}{2\theta} q(x)\right] \\
 &\quad \times \sin\left[k_f x + k_f \frac{\alpha_v + \alpha_t}{2\theta} G(x) + \varphi\right]
 \end{aligned}
 \tag{4.137}$$

On en déduit l'expression de la pression acoustique :

$$\begin{aligned}
 p(x,t) &= \frac{\psi_o}{r(x)} \exp\left[\frac{\alpha_v}{2\theta x} - k_f \frac{\alpha_v + \alpha_t}{2\theta} q(x)\right] \\
 &\quad \times \sin\left[k_f x + k_f \frac{\alpha_v + \alpha_t}{2\theta} G(x) + \varphi\right] \exp(-j\omega t)
 \end{aligned}
 \tag{4.138}$$

Il nous reste à tirer la relation entre  $\omega$  et  $k$ . Pour introduire  $k$ , il est nécessaire de prendre en compte les extrémités du résonateur. Considérons le résonateur comme ouvert aux deux bouts. L'impédance étant nulle aux deux extrémités, en  $x = x_e$  et en  $x = x_e + L$ , il vient :

$$\begin{aligned}
 \{p(x_e, t) = 0\} &\rightarrow \varphi = -k_f x_e - k_f \frac{\alpha_v + \alpha_t}{2\theta} G(x_e) \\
 \{p(x_e + L, t) = 0\} &\rightarrow k_f L + k_f \frac{\alpha_v + \alpha_t}{2\theta} (G(x_e + L) - G(x_e)) = n\pi
 \end{aligned}$$

Ces relations déterminent la valeur de  $k_f$  pour  $k = n(\pi/L)$

$$k_f = \frac{n\pi}{L} \left[ 1 - \frac{\alpha_v + \alpha_t}{2\theta L} (G(x_e + L) - G(x_e)) \right] = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + V}$$

et la valeur de la pulsation correspondante :

$$\omega \approx \frac{n\pi c}{L} \left[ 1 + \frac{V}{2(n\pi/L)^2} - \frac{\alpha_v + \alpha_t}{2r_s} (G(x_e + L) - G(x_e)) \right] \quad [4.139]$$

D'une façon générale, la relation entre  $\omega$  et  $k$  imposée par le résonateur s'écrit donc sous la forme suivante :

$$\omega = ck \left[ 1 + \frac{V}{2k^2} - \frac{\alpha_v + \alpha_t}{2r_s} (G(x_e + L) - G(x_e)) \right] \quad [4.140]$$

La relation de dispersion prend ici une forme un peu particulière : elle dépend de la position des extrémités. Mais elle va nous être utile car elle nous permettra, sans changer la position des extrémités, de modifier les impédances à l'entrée et à la sortie.

#### 4.4.2. Correction du nombre d'onde par les conditions aux limites

Les impédances mises à l'entrée et à la sortie comme conditions aux limites ne modifient pas la relation de dispersion : elles influent seulement sur les valeurs possibles de  $k$ . Nous imposons l'impédance de rayonnement (connue) à l'extrémité libre et une impédance ou admittance représentant le système exciteur à l'entrée. La valeur de cette impédance ou admittance dépendra du type d'exciteur choisi : nous procéderons à une brève revue d'ensemble à la fin de ce chapitre. Après avoir calculé les valeurs possibles du nombre d'onde  $k$ , il suffira de les reporter dans la relation de dispersion pour déterminer les valeurs possibles de la pulsation complexe  $\omega$  : celle-ci contient les informations sur la fréquence et le facteur de qualité.

##### 4.4.2.1. Nombre d'onde dans un cylindre avec excitation et rayonnement

La forme générale de l'impédance a été déterminée en [1.60] :

$$Z(x) = j\rho c \tan(kx - \varphi) \quad [4.141]$$

En  $x = L$  la valeur doit être  $Z_{\text{ray}}$ , petite par hypothèse :

$$j\rho c \tan(kL - \varphi) = Z_{\text{ray}} = -j\rho c(\xi kr + j\theta k^2 r^2) \ll 1$$

$$\varphi \approx kL + (\xi kr + j\theta k^2 r^2) \quad [4.142]$$

À l'entrée  $x = 0$ , on a une petite impédance acoustique  $Z_e$  si le système exciteur est ouvert (flûte), une petite admittance acoustique  $Y_e$  s'il est fermé (anche).

• Petite impédance d'entrée

$$-j\rho c \tan[kL + (\xi kr + j\theta k^2 r^2)] = \pi r_e^2 Z_e \ll 1 \quad r_e \approx r$$

$$k_n L + (\xi k_n r + j\theta k_n^2 r^2) \approx j \frac{\pi r^2 Z_e}{\rho c} + n\pi$$

$$k_n L \left( 1 + \frac{\xi r}{L} + j \frac{\theta r^2}{L} k_n - j \frac{\pi r^2 Z_e}{L \rho c k_n} \right) \approx n\pi$$

On obtient les valeurs possibles de  $k_n$  :

$$k_n \approx n \frac{\pi}{L} \left( 1 - \frac{\xi r}{L} - j \frac{2\pi\theta r^2}{cL} f_n + j \frac{r^2 c Z_e}{2L \rho c f_n} \right) \quad [4.143]$$

• Petite admittance d'entrée

$$(-j\rho c \tan[kL + (\xi kr + j\theta k^2 r^2)])^{-1} = \frac{Y_e}{\pi r_e^2} \ll 1 \quad r_e \approx r$$

Il vient :

$$k_n L + (\xi k_n r + j\theta k_n^2 r^2) \approx j \frac{\rho c Y_e}{\pi r^2} + \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$k_n L \left( 1 + \frac{\xi r}{L} + j \frac{\theta r^2}{L} k_n - j \frac{1}{\pi r^2 L} \rho c Y_e \frac{1}{k_n} \right) \approx (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

On obtient ainsi les valeurs possibles de  $k_n$ .

$$k_n \approx (2n-1) \frac{\pi}{2L} \left( 1 - \frac{\xi r}{L} - j \frac{2\pi\theta r^2}{cL} f_n + j \frac{c}{2\pi^2 r^2 L} \rho c Y_e \frac{1}{f_n} \right) \quad [4.144]$$

#### 4.4.2.2. Nombre d'onde dans un cône avec excitation et rayonnement

La forme générale de l'impédance a été déterminée en [1.66] :

$$Z(x) = j\rho c \left[ \frac{1}{\tan(kx - \varphi)} - \frac{1}{kx} \right]^{-1} \quad [4.145]$$

En  $x = L + x_e$  la valeur doit être  $Z_{\text{ray}}$ , petite par hypothèse :

$$\left[ \frac{1}{\tan[k(L + x_e) - \varphi]} - \frac{1}{k(L + x_e)} \right] = \frac{j\rho c}{Z_{\text{ray}}}$$

$$\tan[k(L + x_e) - \varphi] = -(\xi k r_s + j\theta k^2 r_s^2) \ll 1$$

$$\varphi \approx kL + kx_e + \xi k r_s + j\theta k^2 r_s^2 \quad [4.146]$$

À l'entrée  $x = x_e$ , deux cas sont possibles, comme pour le cylindre.

##### • Petite impédance d'entrée

$$j\rho c \tan(kx_e - \varphi) = \pi r_e^2 Z_e \ll 1 \quad \rightarrow \quad \varphi = kx_e + j \frac{\pi r_e^2 Z_e}{\rho c} + n\pi \quad [4.147]$$

Notons que nous ne supposons pas nécessairement  $x_e$  petit.

Compte tenu de [4.146], il vient :

$$k_n L \left( 1 + \frac{\xi r_s}{L} + j \frac{\theta r_s^2}{L} k_n - j \frac{\pi r_e^2 Z_e}{L \rho c k_n} \right) = n\pi$$

On obtient un comportement similaire au cas du tuyau cylindrique ouvert aux

deux extrémités (voir [4.143]) :

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \left( 1 - \frac{\xi r_s}{L} - j \frac{2\pi\theta r_s^2}{cL} f_n + j \frac{r_e^2 c Z_e}{2L \rho c f_n} \right) \quad [4.148]$$

• Petite admittance d'entrée

$$\frac{1}{j\rho c} \left[ \frac{1}{\tan(kx_e - \varphi)} - \frac{1}{kx_e} \right] = \frac{Y_e}{\pi r_e^2} \quad [4.149]$$

Il s'avère que les solutions pour  $k$  ne sont proches de valeurs harmoniques que si le cône est tronqué près de son sommet, ce que nous supposons donc :

$$kx_e \ll 1 \quad \text{condition nécessaire supplémentaire} \quad [4.150]$$

Il vient :

$$\frac{1}{\tan(kx_e - \varphi)} = \frac{1}{kx_e} + j \frac{\rho c Y_e}{\pi r_e^2} = \frac{1}{kx_e} \left( 1 + j \frac{kx_e}{\pi r_e^2} \rho c Y_e \right)$$

$$kx_e \left( 1 - j \frac{kx_e}{\pi r_e^2} \rho c Y_e \right) = \tan(kx_e - \varphi) \approx kx_e - \varphi + n\pi$$

On en tire, en notant  $2\varepsilon$  l'angle au sommet du cône :

$$\varphi \approx j \frac{\rho c Y_e}{\pi r_e^2} (kx_e)^2 + n\pi = j \frac{\rho c Y_e}{\pi \varepsilon^2} k^2 + n\pi \quad [4.151]$$

Compte tenu de [4.146], il vient :

$$k_n L \left( 1 + \frac{x_e}{L} + \frac{\xi r_s}{L} + j \frac{\theta r_s^2}{L} k_n - j \frac{1}{\pi \varepsilon^2 L} \rho c Y_e k_n \right) = n\pi$$

On obtient les valeurs possibles de  $k_n$  :

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \left( 1 - \frac{x_e}{L} - \frac{\xi r_s}{L} - j \frac{2\pi\theta r_s^2}{cL} f_n + j \frac{2}{\varepsilon^2 cL} \rho c Y_e f_n \right) \quad \text{avec } kx_e \ll 1 \quad [4.152]$$

#### 4.4.3. Modes propres d'un instrument à vent de type cylindrique

À partir des résultats ci-dessus, nous sommes en mesure de calculer la pulsation complexe pour toutes les combinaisons possibles de résonateur et de système excitateur, ce qui va nous permettre de faire quelques remarques sur les valeurs de fréquences et de facteurs de qualité.

##### 4.4.3.1. Flûte Boehm, jeux d'orgue à bouche

On associe un résonateur de type cylindrique avec une embouchure de flûte. À partir de [4.124] et [4.143] on obtient :

$$\omega_n \approx 2\pi n f_o \left( 1 - \frac{\xi r}{L} + \frac{c^2 V}{8\pi^2} \frac{1}{n^2 f_o^2} - \frac{\beta}{2r} \frac{1}{\sqrt{n f_o}} - \frac{r^2 c}{2L} \frac{\text{Im}Z_e}{\rho c} \frac{1}{n f_o} \right) \quad [4.153]$$

$$\times \left( 1 - j \frac{Q_n^{-1}}{2} + j \frac{r^2 c}{2L} \frac{\text{Re}Z_e}{\rho c} \frac{1}{n f_o} \right)$$

$$\text{avec } f_o = \frac{c}{2L} \quad \frac{\beta}{\sqrt{n f_o}} = \alpha_v + \alpha_t \quad Q_n^{-1} = \frac{\beta}{r} \frac{1}{\sqrt{n f_o}} + \frac{4\pi\theta r^2}{cL} n f_o \quad [4.154]$$

##### • Remarques sur la justesse

Le premier terme correctif sur la fréquence représente la correction de bout introduite par la partie imaginaire de l'impédance de rayonnement : dans le cadre d'une perturbation au premier ordre, elle est indépendante de la fréquence et abaisse tous les partiels sans modifier l'harmonicité. L'abaissement de fréquence est dû à l'ajout d'une masse d'air en vibration à l'extrémité : cette tranche d'air a une épaisseur  $\xi r$  indépendante de la fréquence.

Le troisième terme montre l'effet de la couche limite, qui abaisse les fréquences.

La couche limite abaisse plus le fondamental que le partiel 2, l'octave se trouve donc dilatée. Les partiels aigus ne sont pas sensiblement touchés.

La correction de forme, que montre le deuxième terme, va dans le même sens que la couche limite. La flûte Boehm possède, en effet, un corps cylindrique mais une tête de diamètre légèrement plus petit : il en résulte une légère concavité tournée vers l'intérieur ( $V < 0$ )

Au total, la flûte a donc des octaves dilatées : c'est ce qu'on peut constater par un relevé du champ de liberté sur toutes les flûtes considérées comme justes musicalement. La raison est psychoacoustique : la flûte est un instrument à timbre pauvre et, comme pour le piano, l'oreille souhaite que les octaves soient dilatées quelque peu pour avoir la sensation de justesse. Ce fait pose, naturellement, quelques problèmes de justesse quand l'instrument n'est plus soliste. Mais ils sont facilement résolus par le flûtiste à condition qu'il soit bon musicien : il suffit d'abaisser l'aigu à la bonne fréquence en "couvrant" légèrement l'embouchure, ce qui ferme en partie le résonateur à l'extrémité.

Par ailleurs, la fréquence est abaissée ou augmentée suivant le signe de  $\text{Im}Z_e$  : nous commenterons le fonctionnement de l'embouchure de flûte ci-après.

• Remarques sur le facteur de qualité

En régime permanent, le terme d'entretien vient compenser les pertes, de façon à rendre  $\omega$  réel. En régime transitoire, l'amplitude augmente ou diminue comme  $\exp(-j\omega t)$ . Pour une attaque, le temps de montée, dans ce modèle, est  $\tau = Q/\pi f$ . Pour  $Q = 30$ ,  $\tau = 100\text{ms}$  à  $100\text{Hz}$ . À même valeur de  $Q$ , ce temps de montée est plus long pour une note grave que pour une note aiguë.

La forme de  $Q$  trouvée en [4.154] permet une discussion des pertes. À basses fréquences et pour un petit diamètre c'est la couche limite qui dissipe. À hautes fréquences et pour un grand diamètre, c'est au contraire le rayonnement. Pour une flûte Boehm ( $L = 64\text{cm}$ ,  $2r = 1,8\text{cm}$ ) le fondamental "sort" encore bien. Mais si on diminuait le diamètre, on aurait rapidement des ennuis. De telles flûtes longues et fines existent et sont jouées dans certaines musiques traditionnelles (flûte "harmonique"). On y utilise exclusivement les partiels ( $n = 2, 3, 4, \text{etc...}$ ). À l'inverse, pour un grand rapport  $L/r$ , l'obtention des partiels élevés devient impossible à cause du rayonnement (et aussi à cause d'une inharmonicité qui croît fortement). Pour  $L/r \approx 10$ , le fondamental est périlleux, le partiel 2 impossible :

$$Q = \frac{1}{2\pi\theta} \left(\frac{L}{r}\right)^2 \frac{1}{n} \approx \frac{30}{n}$$

Dans l'orgue, on utilise des tuyaux dits *de grande taille* (grand rapport  $r/L$ ) pour obtenir des timbres extrêmement pauvres en harmoniques (*flûte de pédale*, *nasard*, *tierce*), réservant les tuyaux de *taille menue* (petit rapport  $r/L$ ) aux jeux riches en harmoniques (jeu de *gambe*).

Enfin, pour construire une famille d'instruments telle que la famille des flûtes Boehm ou l'ensemble des tuyaux d'un même jeu d'orgue, il convient de respecter

une règle de proportion diamètre / longueur. Pour que les instruments de la famille fonctionnent d'une manière comparable, le facteur de qualité doit être indépendant de la taille. Si l'on considère cette règle pour les fondamentaux et relativement aux pertes de couche limite, on doit respecter la condition suivante :

$$\frac{\beta}{r} \frac{1}{\sqrt{f_o}} = \text{constante} \quad \leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{L}}{r} = \text{constante} \quad [4.155]$$

Si on divise  $L$  par 2, on divise  $r$  par  $\sqrt{2}$ . Les différents instruments de la famille ne sont pas homothétiques, ils doivent être d'autant plus "trapus" que leur longueur est courte. Une remarque analogue (voir [4.161]) peut être faite pour la famille des saxophones dont l'angle est d'autant plus ouvert que la longueur est courte.

#### 4.4.3.2. Clarinette

La clarinette associe un résonateur de type cylindrique à un système exciteur utilisant une anche simple battante. L'association de [4.124] et [4.144] donne :

$$\omega_n \approx \left( 1 - \frac{\xi r}{L} + \frac{c^2 V}{8\pi^2} \frac{1}{(2n-1)^2 f_o^2} - \frac{\beta}{2r} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)f_o}} - \frac{c}{2\pi^2 r^2 L} \frac{\rho c \text{Im} Y_e}{(2n-1)f_o} \right) (2n-1)f_o \times \left( 1 - j \frac{Q_n^{-1}}{2} + j \frac{c}{2\pi^2 r^2 L} \rho c \text{Re} Y_e \frac{1}{(2n-1)f_o} \right) \quad [4.156]$$

$$f_o = c/4L \quad \frac{\beta}{\sqrt{(2n-1)f_o}} = \alpha_v + \alpha_t \quad Q_n^{-1} = \frac{\beta}{r} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)f_o}} + \frac{4\pi\theta r^2}{cL} (2n-1)f_o \quad [4.157]$$

##### • Remarques sur la justesse

Dans les corrections sur la fréquence, le premier terme (rayonnement) et le troisième (effet de la couche limite) sont les mêmes que dans la flûte Boehm.

La perce de la clarinette n'est pas vraiment cylindrique et, hormis à l'extrémité du bec, la concavité est tournée vers l'extérieur :  $V > 0$ . Cette forme "ouverte" permet une compensation de l'abaissement de fréquence dû à la couche limite. Contrairement à la flûte, le relevé du champ de liberté montre un aigu *mathématiquement juste*, souhaité *psychoacoustiquement* car le timbre est riche.

• Remarques sur le timbre

La richesse ou la pauvreté du timbre dépendent du facteur de qualité mais aussi de la non-linéarité de l'excitateur. Pour un mouvement de l'anche à la fréquence  $f$ , le débit injecté par l'anche battante est riche en composantes  $2f$ ,  $3f$ , etc. Les composantes impaires sont amplifiées par le facteur de qualité du résonateur, elles sont prédominantes dans l'énergie rayonnée, du moins dans tout le registre grave qui utilise le fondamental (fréquence  $f$ ). Cependant, les composantes paires du débit injecté par l'anche se retrouvent en partie dans l'énergie rayonnée. L'anche battante est une source non linéaire de faible admittance (admittance nulle si l'anche est fermée). Dans la nuance *piano*, le clarinettiste parvient à laisser l'anche partiellement ouverte : le son *détimbré* qui en résulte comprend des composantes paires au même titre que des composantes impaires (le tuyau reste partiellement ouvert), le son devenant quasi sinusoïdal dans la limite *pianissimo*. La clarinette a donc cette particularité de permettre des différences de timbre extrêmement contrastées selon le registre, la nuance, la technique d'anche.

#### 4.4.4. Modes propres d'un instrument à vent de type conique

##### 4.4.4.1. Les flûtes coniques

Les instruments concernés sont principalement la flûte à bec et la flûte traversière baroque. Dans les deux cas, le résonateur est du type conique inversé, c'est-à-dire avec le sommet du cône du côté du pied de l'instrument. On note  $r_s$  le rayon de sortie,  $x_s$  l'abscisse du pied et on prend l'origine des abscisses près du pied (sommet du cône). L'association d'une embouchure de flûte à un résonateur de type conique conduit, compte tenu de [4.140] et [4.148], à :

$$\omega_n = 2\pi n f_o \left( 1 - \frac{\xi r_s}{L} + \frac{Vc^2}{8\pi^2} \frac{1}{(nf_o)^2} - \frac{\beta}{2r_s} G(x_s, L) \frac{1}{\sqrt{nf_o}} + \frac{r_e^2 c}{2L} \frac{\text{Im}Z_e}{\rho c} \frac{1}{nf_o} \right) \quad [4.158]$$

$$\times \left( 1 - j \frac{Q_n^{-1}}{2} + j \frac{r_e^2 c}{2L} \frac{\text{Re}Z_e}{\rho c} \frac{1}{nf_o} \right)$$

$$f_o = c/2L \quad Q_n^{-1} = \frac{\beta}{r_s} G(x_s, L) \frac{1}{\sqrt{nf_o}} + \frac{2\pi\theta r_s^2}{cL} n f_o \quad [4.159]$$

$$G(x_s, L) = G(x_s + L) - G(x_s)$$

Bien que le corps soit conique, on remarquera que la perce est pratiquement cylindrique près de l'embouchure. Il en résulte une concavité tournée vers l'intérieur, avec  $V < 0$ , comme pour la flûte Boehm.

La flûte traversière baroque a connu l'apogée de sa facture au XVIIIème siècle, dont on dit souvent que c'est l'âge d'or de la flûte. Elle a été remplacée au XIXème siècle par la flûte Boehm, qui a atteint également la perfection dans sa facture. Chaque instrument offre des possibilités que l'autre n'a pas et marque l'évolution du goût. À travers de nombreuses différences, le physicien notera la permanence de la condition  $V < 0$ , obtenue dans les deux cas par des moyens différents. Nous pensons que cette caractéristique possède une signification profonde sur laquelle nous allons insister.

Dans la flûte, le jet d'air oscillant est une source de faible impédance, qui génère une faible pression acoustique à l'entrée. Mais la variation de pression liée à l'entrée ou à la sortie du jet dans l'embouchure n'a pas la brutalité de la variation de débit produite quand l'anche bat : la non-linéarité du système exciteur de flûtes est beaucoup plus faible. Il en résulte *un timbre pauvre pour toute la famille de flûtes*, donc la *nécessité psychoacoustique de dilater les octaves* : on tourne la concavité vers l'intérieur. Au contraire, la plupart des autres instruments à vent ont un timbre riche qui demande la justesse des octaves : on corrige l'abaissement de fréquence dû à la couche limite tournant la concavité vers l'extérieur. On remarquera aussi que la pauvreté du timbre de la flûte et la petitesse du diamètre de l'instrument font que la fréquence limite de diffraction tombe dans une gamme de fréquences (10kHz) où il n'y a plus d'harmoniques : l'ajout d'un pavillon de sortie serait parfaitement inutile.

#### 4.4.4.2. Hautbois, basson, saxophone

On associe un résonateur de type conique ([4.140], concavité vers l'extérieur) avec une anche le plus souvent double, simple pour le saxophone ([4.152]). Il vient :

$$\omega_n = 2\pi n f_o \left( 1 - \frac{x_e}{L} - \frac{\xi r_s}{L} + \frac{Vc^2}{8\pi^2} \frac{1}{(nf_o)^2} - \frac{\beta G(x_e, L)}{2r_s \sqrt{nf_o}} + \frac{2\rho c \text{Im} Y_e}{\varepsilon^2 c L} n f_o \right) \quad [4.160]$$

$$\times \left( 1 - j \frac{Q_n^{-1}}{2} + j \frac{2}{\varepsilon^2 c L} \rho c \text{Re} Y_e n f_o \right)$$

avec

$$\begin{aligned}
 f_o &= c/2L \\
 kx_e &\ll 1 \\
 G(x_e, L) &= G(x_e + L) - G(x_e)
 \end{aligned}
 \quad
 Q_n^{-1} = \frac{\beta}{r_s} G(x_e, L) \frac{1}{\sqrt{nf_o}} + \frac{2\pi\theta r_s^2}{cL} n f_o \quad [4.161]$$

La nécessité, pour raison de justesse, de tronquer le cône très près du sommet (voir [4.150]) conduit à utiliser le plus souvent une anche double, formée de deux palettes de roseau ligaturées sur un tube : le diamètre de sortie est alors faible. Pour le basson, la valeur très faible de l'angle du cône rend possible l'obtention d'une tessiture extrêmement étendue (hautes fréquences très peu amorties). Il en résulte un timbre riche en composantes aiguës mais pauvre en basses fréquences (fort amortissement de couche limite). Comme la tessiture descend loin dans le grave, le timbre restant riche, le nombre d'harmoniques est très élevé, mais leur amplitude n'est nulle part grande. Cette situation peut être rapprochée du clavecin. Elle en diffère par l'existence de formants et d'anti-formants dus à plusieurs phénomènes de filtrage (voir J. Kergomard, bulletin du GAM sur le basson) : il en résulte une sonorité qualifiée de *nasillarde* par ses détracteurs. Du fait de l'importance des pertes par viscosité, la première note est délicate à produire.

Pour pouvoir monter une anche simple sur un cône, Adolphe Sax a été conduit à réaliser une troncature plus large : on a donc une tessiture relativement réduite pour le saxophone (inharmonicité due à la troncature). La recherche de puissance a conduit au choix d'un angle relativement grand pour le cône, d'une ouverture très large au pavillon, choix cohérent avec la faible étendue de la tessiture : on obtient un timbre relativement doux (pertes importantes en hautes fréquences), riche en fondamental (peu de pertes dans la couche limite).

On remarquera que le terme d'entretien n'a pas la même dépendance en fréquence pour un cylindre et pour un cône.

$$j \frac{c}{2\pi^2 r^2 L} \rho c \operatorname{Re} Y_e \frac{1}{(2n-1)f_o} \quad j \frac{2}{\varepsilon^2 c L} \rho c \operatorname{Re} Y_e n f_o \quad [4.162]$$

Pour une même valeur d'admittance et à pertes égales, un résonateur conique favorise le fonctionnement sur des partiels de rang plus élevé.

#### 4.4.4.3. Les cuivres

Contrairement aux bois de l'orchestre qui fonctionnent à des fréquences très inférieures à la fréquence propre de leurs anches (anche faible, voir ci-après), les cuivres sont joués avec des anches lippales qui oscillent légèrement au-dessus de leur fréquence propre (anche forte). Les cuivres permettent donc, par les lèvres, un

contrôle direct de la note jouée. Au XVIII<sup>ème</sup> siècle, beaucoup de cuivres se jouaient sans doigtés (*trompette naturelle*). L'adjonction de pistons, qui introduisent des longueurs variables de résonateur, s'est faite tardivement. Elle implique l'existence d'une partie cylindrique relativement longue dans le résonateur, qui pourrait sembler surprenante quand on sait que les partiels pairs de ce tuyau fermé à l'embouchure sont couramment utilisés.

L'obtention de partiels pairs à partir d'un tuyau cylindrique fermé implique une correction de forme assez sévère :

$$V = \frac{r''(x)}{r(x)} > 0$$

L'évasement pratiqué remonte les fréquences selon une recette du type suivant :

$$1f_o, 3f_o, 5f_o, 7f_o... \rightarrow \alpha f_o, 4f_o, 6f_o, 8f_o... \quad 1 < \alpha < 2 \quad [4.163]$$

On obtient ainsi une série harmonique complète sur une base double, à laquelle il ne manque que le point de départ, dont la fréquence est beaucoup trop basse. La note qui correspond à ce point de départ inutilisable s'appelle *note pédale* : on parvient à la jouer en utilisant pour l'entretien les harmoniques 2, 3, ... qu'elle possède, ce qui nécessite de la jouer en nuance *forte* et timbrée.

Cette sévère correction de forme du résonateur, qui met également à contribution, pour une part, l'embouchure et le pavillon, dépasse le cadre de notre présentation en petite perturbation, sans en mettre en cause les conclusions qualitatives. L'influence du volume de l'embouchure et du pavillon sur la justesse s'introduit par les termes en  $\text{Im}Y_e$  et  $\text{Im}Z_{\text{ray}}$  de la correction de fréquence : ces deux termes concernent une masse (abaissement). L'anche lippale proprement dite fait au contraire monter la fréquence (voir ci-après).

L'embouchure des cuivres est étudiée ci-après. Le filtre constitué par le pavillon terminal est utilisé à des fins expressives : on le modifie au moyen de sourdines.

#### 4.5. Systèmes excitateurs des instruments à vent

Ces systèmes ont pour fonction de transformer de l'énergie potentielle statique, puisée dans un réservoir d'air comprimé, en une énergie acoustique : le nécessaire changement de fréquence est par essence un phénomène non linéaire. On désigne ce type de comportement sous le terme général d'*auto-oscillation*. Dans la famille des flûtes, l'auto-oscillation concerne une lame d'air qui oscille sur un biseau fixe. Les autres instruments à vent utilisent une anche vibrante qui fait office de valve.

L'aérodynamique des auto-oscillations dans les instruments à vent est extrêmement complexe, ne serait-ce que parce que les écoulements y sont en général nettement tourbillonnaires. Nous allons présenter une version très simplifiée des phé-

nomènes en ne gardant que les caractéristiques nécessaires à une compréhension de base. Nous souhaitons dégager les paramètres principaux qui interviennent dans la valeur de l'admittance ou de l'impédance acoustique de la source. En reportant cette valeur dans le chapitre précédent, nous pourrions voir l'influence de ces paramètres sur l'entretien (partie réelle) et la fréquence (partie imaginaire).

Les calculs seront faits en linéarisant le fonctionnement. Dans cette étape, l'aspect timbre est laissé de côté.

#### 4.5.1. *Fonctionnement des anches*

Donnons tout d'abord quelques définitions et points de repère. La clarinette, le saxophone fonctionnent avec une *anche simple*, constituée d'une fine lame de roseau, qui vient battre contre le bec lorsqu'elle obture l'entrée : on parle d'*anche battante*. Le hautbois, le basson utilisent une *anche double* constituée de deux étroites palettes ligaturées pour faire un petit tube côté instrument : elles viennent battre l'une contre l'autre à l'obturation, l'anche double est également une *anche battante*. Le roseau étant un matériau de faible densité, la fréquence propre de ces anches est beaucoup plus élevée que la fréquence de jeu. L'anche d'orgue est une *anche simple battante* mais elle est réalisée dans un métal dense (laiton). Elle fonctionne au voisinage de sa fréquence propre : on dit qu'il s'agit d'une *anche forte*. L'anche d'harmonica, d'accordéon ou d'harmonium est également une *anche simple forte*, mais elle ne bat pas : elle obture une platine qu'elle peut traverser librement : on parle d'*anche libre*. Enfin, les *anches lippales* dont l'usage définit la famille des *cuivres* sont, avec les *cordes vocales*, des *anches fortes battantes*.

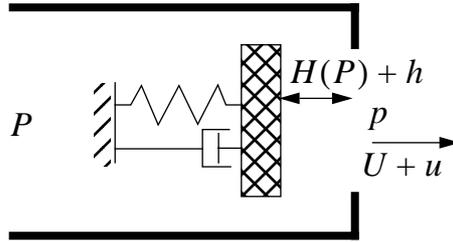
Deux types de fonctionnement sont utilisés (voir Fletcher et Rossing). Dans le fonctionnement de *type I*, la valve se ferme sous l'action de la pression statique : nous allons montrer que l'auto-oscillation nécessite l'existence d'une raideur de la valve. Dans le fonctionnement de *type II*, la valve s'ouvre sous l'action de la pression : l'auto-oscillation n'est possible que si la valve possède une masse.

Nous prendrons comme point de départ l'anche d'harmonica car cet instrument utilise, dans le jeu professionnel, les deux types de fonctionnement comme modes de jeu : il se prête donc bien à une vision globale des choses.

##### 4.5.1.1. *Fonctionnement de type I*

En régime statique, la position de la valve est repérée par sa hauteur d'ouverture  $H$ , fonction de la surpression statique amont, de la raideur  $K$  du ressort et de la surface  $S$  sur laquelle la pression s'exerce :

$$H(P) = H - SP/K \quad [4.164]$$



**Figure 4.15.** *Auto-oscillation : fonctionnement de type I.*

Par l'ouverture, l'air s'écoule à une vitesse  $U$  que nous supposons simplement donnée par la loi de Bernoulli :

$$P = \frac{1}{2}\rho U^2 \quad [4.165]$$

Désignons par  $2L$  le périmètre de l'ouverture, le débit statique est donné par :

$$\phi = 2LH(P)U \quad [4.166]$$

En régime d'auto-oscillation, les grandeurs statiques fluctuent :

$$\{(P \rightarrow P - p), (U \rightarrow U + u), (H(P) \rightarrow H(P) + h)\} \quad [4.167]$$

La pression varie en aval mais aussi en amont de l'anche, nous noterons  $p$  la surpression acoustique globale comptée en aval : c'est elle qui va ouvrir l'anche lors de l'oscillation. L'anche est un système masse-ressort soumis à une force d'entretien :

$$M\dot{h} + R\dot{h} + Kh = Sp \quad [4.168]$$

Le module et la phase de  $p$  sont déterminés par la géométrie de l'écoulement, pour  $h$  donné. Le calcul aérodynamique est délicat et pose beaucoup de problèmes (voir Beavers). Nous supposons simplement que  $p$  existe : sa valeur est accessible expérimentalement. Par différentiation du régime statique, en ne gardant que les termes linéaires, il vient :

$$dP = -p = \rho U dU = \rho U u$$

Le débit acoustique de la source est donné par :

$$d\phi = \dot{\phi} = 2L(Uh + uH) = 2LU \left[ h - \frac{p}{\rho U^2} (H - SP/K) \right] \quad [4.169]$$

On en tire l'admittance acoustique de la source

$$Y_e = \frac{\varphi}{p} = 2LU \left( \frac{S}{K - M\omega^2 - jR\omega} - \frac{H - SP/K}{2P} \right) \quad [4.170]$$

Posons

$$\omega_o = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \frac{R}{M} = Q^{-1}\omega_o \quad [4.171]$$

La source acoustique est alors représentée par les deux expressions suivantes :

$$\operatorname{Re}Y_e = 2LU \left[ \frac{S}{M} \frac{\omega_o^2 - \omega^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + Q^{-2}\omega_o^2\omega^2} - \frac{H - SP/K}{2P} \right] \quad [4.172]$$

$$\operatorname{Im}Y_e = 2LU \frac{S}{M} \frac{Q^{-1}\omega_o\omega}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + Q^{-2}\omega_o^2\omega^2} \rightarrow \operatorname{Im}Y_e > 0 \quad [4.173]$$

L'auto-oscillation n'est possible qu'avec les conditions suivantes :

$$\operatorname{Re}Y_e > 0 \quad \rightarrow \quad \omega < \omega_o \quad [4.174]$$

La fréquence de jeu est nécessairement inférieure à la fréquence propre de l'anche. On ne peut donc faire tendre la raideur vers zéro. D'autre part,  $\operatorname{Im}Y_e > 0$  : la fréquence de jeu quand on couple l'anche forte à un tuyau sera nécessairement inférieure (voir [4.156] et [4.160]) à la fréquence propre du tuyau, anche fermée bloquée.

#### 4.5.1.2. Fonctionnement de type II

Maintenant, la valve s'ouvre sous l'action de la pression statique. Avec les mêmes notations, nous avons :

$$H(P) = H + \frac{SP}{K} \quad [4.175]$$

et

$$M\ddot{h} + R\dot{h} + Kh = -Sp \quad [4.176]$$

On voit que le résultat se déduit formellement du précédent par un changement de  $S$  en  $-S$  :

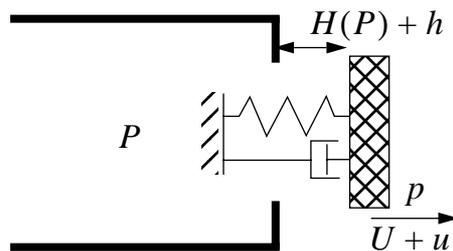
$$\operatorname{Re}Y_e = 2LU \left[ \frac{S}{M} \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + Q^{-2} \omega_o^2 \omega^2} - \frac{H + SP/K}{2P} \right] \quad [4.177]$$

$$\operatorname{Im}Y_e = -2LU \frac{S}{M} \frac{Q^{-1} \omega_o \omega}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + Q^{-2} \omega_o^2 \omega^2} \rightarrow \operatorname{Im}Y_e < 0 \quad [4.178]$$

L'auto-oscillation n'est possible qu'avec les conditions suivantes :

$$\operatorname{Re}Y_e > 0 \rightarrow \omega > \omega_o \quad [4.179]$$

La fréquence de jeu est toujours supérieure à la fréquence propre de l'anche : on ne peut donc faire tendre la masse vers zéro. D'autre part,  $\operatorname{Im}Y_e < 0$  : la fréquence de jeu avec une anche forte couplée à un tuyau sera nécessairement supérieure ([4.156] et [4.160]) à la fréquence propre du tuyau, anche fermée bloquée. En aspirant sur une anche simple ou double en roseau, on produit un couinement qui révèle une auto-oscillation de *type II* au-dessus de la fréquence propre de l'anche.



**Figure 4.16.** Auto-oscillation : fonctionnement de *type II*.

#### 4.5.1.3. Anche forte, anche faible

La description précédente convient quand l'anche fonctionne au voisinage de sa

fréquence propre, ce que nous avons appelé *anche forte*. On procède à l'accord par le réglage de l'anche, en ajustant la masse ou la raideur (harmonica, accordéon), la longueur vibrante (anches d'orgue dont on règle la *rasette*). Pour les cordes vocales et anches lippales, le contrôle permanent de ces trois paramètres permet de faire les notes et constitue le fondement de la technique.

Pour les instruments à anche simple ou double de l'orchestre, en fonctionnement de *type I*, on peut négliger la masse et considérer dans [4.172] la limite  $\omega_o \rightarrow \infty$  :

$$\operatorname{Re}Y_e \approx 2LU \left( \frac{S}{M\omega_o^2} - \frac{H - SP/K}{2P} \right) = 2LU \left( \frac{3S}{2K} - \frac{H}{2P} \right) \quad [4.180]$$

On obtient la condition nécessaire d'auto-oscillation suivante sur  $P$  :

$$P > P_o/3 \quad \text{avec} \quad P_o = HK/S \quad [4.181]$$

Il existe un seuil de pression, le tiers de la pression de fermeture de l'anche, en dessous duquel l'anche ne peut osciller. Le modèle doit être complété pour trouver la partie imaginaire de l'admittance, nous préciserons les choses lors du calcul sur le bec de la clarinette. Dans les cas ci-dessus, que l'on appelle *anches faibles*, on fait les notes par le résonateur, que l'on perce de *trous latéraux* afin d'en rendre la longueur ajustable par des doigtés.

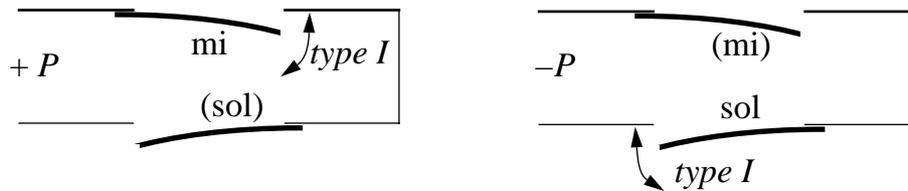
#### 4.5.1.4. Fonctionnement des anches dans l'harmonica : couplages

L'harmonica diatonique est un jouet destiné aux enfants. L'instrument comporte 10 canaux, avec deux anches en regard pour chaque canal. Il est construit pour le mode de jeu normal en fonctionnement de *type I* exclusivement : l'une des anches parle à l'expiration, l'autre à l'inspiration. De jeunes artistes ont récemment bouleversé le monde de l'harmonica en rendant l'harmonica diatonique apte à exprimer toutes les inflexions de la ligne mélodique du blues. Cette "révolution" s'est faite par la maîtrise technique complète de deux modes de jeu en fonctionnement de *type II*, impossibles sur l'harmonica chromatique muni de clapets anti-retour.

- Mode de jeu *glissando*

Sur un canal, on excite en fonctionnement de *type I* la note la plus haute. De la pression acoustique est présente, dans le canal commun, à cette fréquence. Elle induit une petite oscillation de la lame en regard, dont la fréquence propre est plus basse. L'art consiste à faire entrer simultanément en auto-oscillation, en fonctionnement de *type II*, cette anche en regard. Sous l'action simultanée de ces deux "moteurs", les deux lames oscillent à la même fréquence, constituant un oscillateur

en soufflant	do	mi	sol	do	mi	sol	do	mi	sol	do
en aspirant	ré	sol	si	ré	fa	la	si	ré	fa	la



**Figure 4.17.** Fonctionnement normal de l'harmonica (trou n°2).

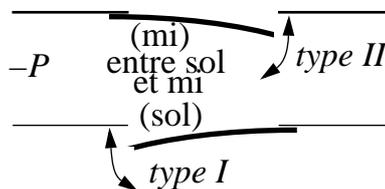
composé :

$$\{[h_1(t) = h_1 \exp(-j\omega t)], [h_2(t) = h_2 \exp(-j\omega t)]\} \quad [4.182]$$

La valeur de cette fréquence s'obtient par un bilan d'énergie potentielle et d'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}(K_1 h_1^2 + K_2 h_2^2) = \frac{1}{2}(M_1 \omega^2 h_1^2 + M_2 \omega^2 h_2^2) \quad [4.183]$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K_1 h_1^2 + K_2 h_2^2}{M_1 h_1^2 + M_2 h_2^2}} \quad [4.184]$$



**Figure 4.18.** Mode de jeu "glissando" (professionnel, trou n°2).

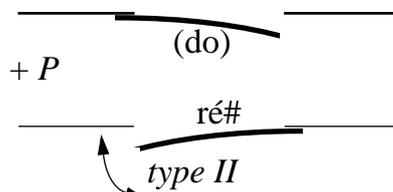
Selon la valeur respective des amplitudes, la fréquence de jeu prend n'importe quelle valeur entre deux limites imposées par chacune des anches. L'artiste est maître de la hauteur. Il pilote la fréquence en ajustant une résonance de la cavité buccale (lorsqu'on passe de la voyelle "i" à la voyelle "ou", une fréquence de résonance de la cavité buccale glisse vers le bas).

L'inverse n'est pas possible : partant de la note la plus basse en fonctionnement

de *type I*, on ne peut ni monter la fréquence (on peut seulement la descendre un peu par couplage avec la cavité buccale), ni mettre en auto-oscillation la lame en regard en fonctionnement de *type II* (sa fréquence propre est supérieure).

- Mode de jeu *overblow*

En soufflant normalement, l'une des anches auto-oscille en fonctionnement de *type I*. En soufflant brutalement, l'art consiste à enclencher une auto-oscillation en fonctionnement de *type II* de la lame en regard, ce qui a pour résultat de bloquer la première (on peut d'ailleurs la scotcher au préalable). La note obtenue en *overblow* est au-dessus de la fréquence propre au lieu d'être en dessous. Les bons musiciens la jouent un demi-ton plus haut que celle obtenue sur la même lame en aspiration (fonctionnement normal). L'opération inverse à l'aspiration, *overdraw*, est possi-



**Figure 4.19.** Mode de jeu “*overblow*” (professionnel, trou n°1).

ble, mais plus difficile en pratique.

Pour un bon fonctionnement des anches, il convient de leur donner au repos la forme du premier mode propre d'une verge encastrée : l'oscillation peut alors amener, pour une certaine amplitude, la lame en position droite où elle obture exactement l'ouverture de la platine. Cette bonne obturation assure une valeur élevée de la pression acoustique et procure une bonne force de rappel. L'*overblow* est souvent impossible à réaliser sur les instruments du commerce : sous l'action de la pression statique, l'ouverture augmente, la position moyenne devient trop ouverte pour la lame concernée et l'obturation ne peut se faire que pour une amplitude extrêmement grande. Il convient de modifier le réglage initial en rapprochant les anches de la platine (tout en conservant la forme du premier mode propre).

- Justification du modèle d'anche

Les mesures réalisées au moyen de jauges de contrainte et d'un capteur de pression montrent que le modèle d'anche forte rend correctement compte du mécanisme. On constate que l'oscillation de l'anche libre est purement sinusoïdale (ce qui n'est pas du tout le cas pour les anches battantes en roseau). Le fait n'est pas si étonnant : l'anche est faiblement amortie et son oscillation entretenue à une fréquence proche du fondamental n'a aucune raison d'incorporer une contribution du second partiel, très inharmonique. La situation est évidemment très différente dans les anches faibles puisque ces fréquences n'interviennent pas dans le problème. Ce mouvement d'auto-oscillation au mécanisme très linéaire n'empêche pas l'existence d'une très forte non-linéarité au niveau du débit acoustique : le timbre de l'instrument est particulièrement riche en harmoniques de rangs élevés.

#### 4.5.1.5. Couplage anche forte avec tuyau cylindrique : bourdon d'orgue

L'anche est ici battante, son mouvement n'est plus sinusoïdal, mais le modèle permet la compréhension qualitative d'une expérience de Bouasse. L'anche d'orgue auto-oscille en fonctionnement de *type I* sous l'action de la soufflerie. Partant de la longueur maximum de l'anche, Bouasse observe la croissance de la fréquence lorsqu'il diminue la longueur vibrante au moyen de la rasette. La dépendance est d'abord en  $1/L^2$  (verge encastrée, voir [3.78]). Mais quand on approche de la première fréquence propre du tuyau, la fréquence croît moins vite. Elle tendrait asymptotiquement vers celle du tuyau si une brusque rupture de régime ne la faisait irréversiblement sauter à une fréquence beaucoup plus élevée qui se trouve sur la courbe en  $1/L^2$  : le couplage avec le tuyau s'est interrompu. En continuant à diminuer la longueur vibrante, Bouasse observe que les choses recommencent au voisinage du partiel suivant du tuyau. Les formules [4.156], [4.172] et [4.173] permettent de comprendre ce comportement en fonctionnement de *type I*. Au début, l'anche auto-oscille seule, elle suit une courbe voisine de la fréquence propre de l'anche, un peu inférieure à celle-ci (condition nécessaire  $\omega < \omega_o$ ). En situation de couplage avec le partiel  $n = 1$ , l'auto-oscillation est régie par :

$$f_1 \approx f_o \left( 1 - \frac{\xi r}{L} + \frac{V}{2k^2} - \frac{\beta}{2r} \frac{1}{\sqrt{f_o}} - \frac{c}{2\pi^2 r^2 L} \frac{\rho c \operatorname{Im} Y_e}{f_o} \right) \quad [4.185]$$

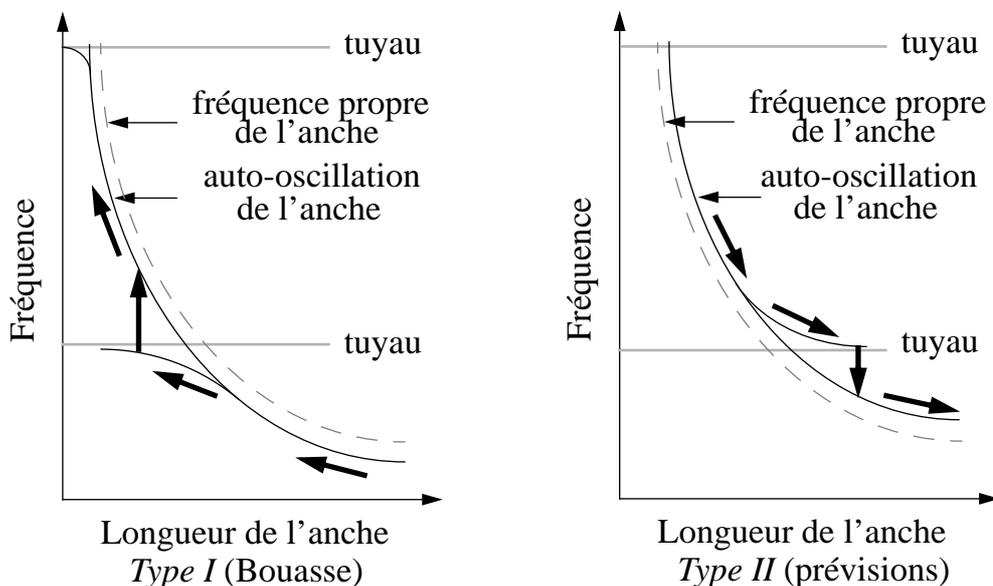
$$\text{avec} \quad \operatorname{Im} Y_e = 2LU \frac{S}{M} \frac{Q^{-1} \omega_o \omega}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + Q^{-2} \omega_o^2 \omega^2} > 0 \quad [4.186]$$

Au fur et à mesure que  $\omega$  s'éloigne de  $\omega_o$ ,  $\operatorname{Im} Y_e$  diminue, on se rapproche de la fréquence propre du tuyau. Mais

$$\operatorname{Re} Y_e = 2LU \left[ \frac{S}{M} \frac{\omega_o^2 - \omega^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + Q^{-2} \omega_o^2 \omega^2} - \frac{H - SP/K}{2P} \right] \quad [4.187]$$

diminue également, rendant plus difficile la condition d'entretien du tuyau :

$$\frac{c}{2\pi^2 r^2 L} \rho c \operatorname{Re} Y_e \frac{1}{f_o} = \frac{Q_n^{-1}}{2} \quad [4.188]$$



**Figure 4.20.** Couplage d'une anche forte avec un tuyau cylindrique.

Quand l'égalité n'est plus assurée, on saute sur la courbe d'auto-oscillation de l'anche seule. Le saut est irréversible, puisque la fréquence d'oscillation est désormais supérieure à la fréquence propre du tuyau. Pour réamorcer le couplage, il faut augmenter la longueur vibrante de façon à repasser en dessous de la fréquence du tuyau, les choses peuvent alors recommencer.

Fort de ce succès du modèle, on peut se risquer à imaginer ce que Bouasse aurait observé s'il avait inversé la soufflerie (certaines anches d'orgue acceptent le fonctionnement en dépression). En fonctionnement de *type II*, on change  $S$  en  $-S$ . Partant d'une faible longueur d'anche, en augmentant la longueur vibrante, on devrait observer que l'auto-oscillation de l'anche seule suit une courbe voisine de la fréquence propre de celle-ci, mais un peu supérieure. En approchant de la résonance du tuyau par valeur supérieure, on quitterait cette courbe. On tendrait asymptotiquement vers la fréquence propre du tuyau, en s'éloignant de celle de l'anche, jusqu'à la rupture irréversible de l'entretien. La fréquence aurait alors sauté à une valeur inférieure à la fréquence propre du tuyau, il faudrait raccourcir sensiblement l'anche pour repasser au dessus et réamorcer le couplage.

#### 4.5.1.6. Anche faible : le bec de la clarinette

Nous allons compléter le modèle afin de préciser la partie imaginaire de  $Y_e$ . Le

point de départ est le même, avec un léger changement de notation :

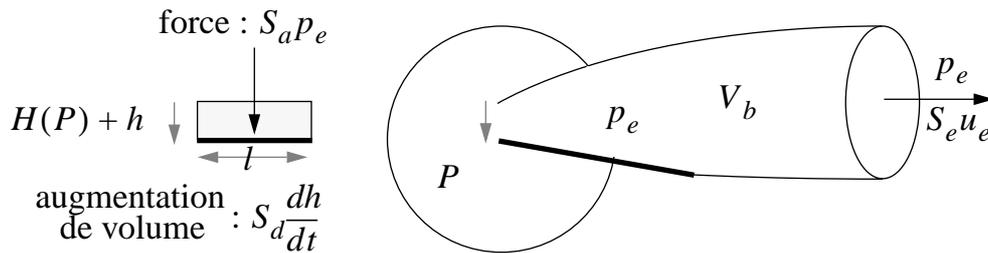
$$\omega \ll \omega_o \quad H(P) = H - \frac{S_a P}{K_a} \quad [4.189]$$

Pour la fonction de transfert de l'anche, on peut ne conserver que la raideur :

$$(K_a - jR_a \omega)h = K_a \left( 1 - j \frac{Q^{-1} \omega}{\omega_o} \right) h \approx K_a h \approx S_a p_e \quad h \approx \frac{S_a p_e}{K_a} \quad [4.190]$$

Le débit entrant dans le bec, de largeur  $l$ , a été obtenu en [4.180]. Il vaut :

$$lU \left( \frac{3S_a}{2K_a} - \frac{H}{2P} \right) p_e$$



**Figure 4.21.** Fonctionnement du bec de clarinette.

Le débit sortant a pour expression  $S_e u_e$ . Le bec de la clarinette reçoit au total l'adjonction, par unité de temps, d'un volume d'air égal à :

$$\frac{dV}{dt} = lU \left( \frac{3S_a}{2K_a} - \frac{H}{2P} \right) p_e - S_e u_e - S_d \frac{dh}{dt}$$

Nous avons tenu compte du volume d'air  $-S_d \dot{h}$  déplacé par le mouvement de l'anche. Cette adjonction d'air dans le volume  $V_b$  du bec entraîne une variation de pression ( $K$  module de compressibilité de l'air) par unité de temps égale à :

$$\frac{dp}{dt} = K \frac{1}{V_b} \frac{dV}{dt}$$

On obtient donc l'équation de conservation suivante :

$$lU\left(\frac{3S_a}{2K_a} - \frac{H}{2P}\right)p_e - Y_e p_e - S_d \dot{h} = \dot{p}_e \frac{V_b}{K} \quad [4.191]$$

Un tenant compte de [4.190], on en déduit l'admittance de la source :

$$Y_e = lU\left(\frac{3S_a}{2K_a} - \frac{H}{2P}\right) + j\omega S_d \frac{S_a}{K_a} + j\omega \frac{V_b}{K} \quad [4.192]$$

Pour la partie réelle, voir [4.181]. Pour la partie imaginaire, on a :

$$\text{Im}Y_e = \frac{2\pi(V_b + V_d)}{K} f_n \quad \text{avec} \quad V_d = \frac{KS_a S_d}{K_a} \quad [4.193]$$

$$f_n = (2n-1)f_o \left( 1 - \frac{\xi r}{L} + \frac{V}{2k^2} - \frac{\beta}{2r} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)f_o}} - \frac{c}{\pi r^2 L} \rho c \frac{V_b + V_d}{K} \right)$$

soit

$$f_n = (2n-1)f_o \left( 1 - \frac{\xi r}{L} + \frac{V}{2k^2} - \frac{\beta}{2r} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)f_o}} - \frac{V_b + V_d}{\pi r^2 L} \right) \quad [4.194]$$

On peut écrire la correction de fréquence sous la forme d'une correction de longueur  $\delta L_e$  à l'embouchure :

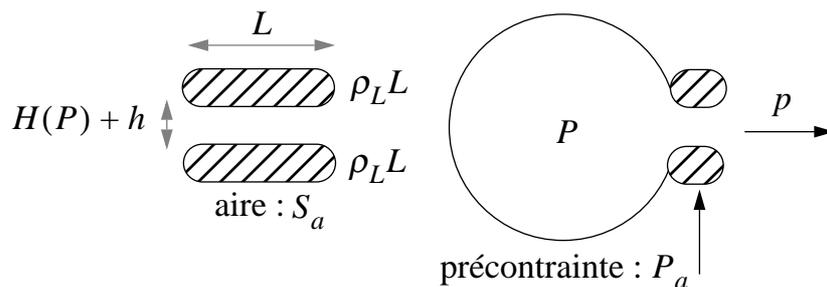
$$\{L \rightarrow L + \delta L_e\} \quad \delta L_e = \frac{V_b}{\pi r_e^2} + \frac{V_d}{\pi r_e^2} \quad \text{avec} \quad V_d = \frac{KS_a S_d}{K_a} \quad [4.195]$$

Cette correction comporte un premier terme géométrique, trivial si le bec est cylindrique de même diamètre que le corps, mais généralisable pour une forme quelconque pour  $V_b$ . Le second terme est une correction de longueur introduite par l'anche, sur laquelle l'instrumentiste a prise : cette correction fait intervenir un volume fictif  $V_d$  qui représente l'effet du déplacement de l'anche. Le clarinettiste modifie  $S_a$ ,  $S_d$  et  $K_a$  selon la façon dont il pince l'anche : il monte ou abaisse ainsi plus ou moins la fréquence de jeu. Ce volume  $V_d$  est indépendant de l'amplitude

de l'anche : ce n'est pas un volume géométrique. On remarquera que la forme rétrécie du bec au niveau de l'anche compense ce volume fictif ajouté par l'anche. Pour le saxophone, la justesse n'est réalisée que lorsque le volume  $V_b + V_d$  est égal au volume tronqué du cône (voir [4.150]) : comme le volume que nécessite le montage d'une anche simple ne peut pas être très petit, la troncature est forcément assez importante et il en résulte une tessiture relativement réduite. Pour les anches doubles, la masse de roseau est également petite, l'anche est faible et le même modèle convient. Mais le volume géométrique  $V_b$  est dans ce cas très petit, négligeable devant  $V_d$ . On rend le volume fictif égal au volume tronqué du cône pour assurer la justesse. La troncature est alors petite, ce qui rend possible une tessiture très étendue (basson). On peut améliorer la description de l'anche double en prenant en compte les pertes par viscosité : à l'intérieur de l'anche, l'épaisseur de l'écoulement étant petite sur une longueur non négligeable, la perte de charge n'est pas négligeable. Ce mécanisme amortit les basses fréquences.

#### 4.5.2. Anches lippales, la voix humaine

Les cordes vocales, comme les lèvres du trompettiste, réalisent une anche double battante de *type II*. La géométrie de l'écoulement est cependant assez différente de l'anche libre : ces anches ont une largeur importante, favorable à l'action de la *force de Bernoulli*. Celle-ci est liée à la diminution de pression qui accompagne



**Figure 4.22.** Anches lippales, voix humaine.

toute augmentation de vitesse dans une constriction, puisque la somme  $p + (1/2)\rho u^2$  doit rester constante. La force de rappel est alors le produit de cette diminution de pression par l'aire de la constriction, au lieu du produit de la surpression aval par l'aire de l'anche dans le cas de l'anche libre. Nous limitons nos ambitions à l'identification des paramètres principaux du comportement qualitatif et

nous adaptons le modèle d'anche forte en procédant à de légères modifications :

$$Y_e = LU \left( \frac{S_a}{2\rho_L L} \frac{\omega^2 - \omega_a^2}{(\omega^2 - \omega_a^2)^2 + Q_a^{-1} \omega_a^2 \omega^2} - \frac{S(P - P_a)}{2K_a P} \right) \quad [4.196]$$

La fréquence d'auto-oscillation est un peu supérieure à la fréquence propre de l'anche, condition nécessaire pour avoir une source acoustique. Nous désignons par  $L$  la longueur vibrante,  $\rho_L$  la masse vibrante par unité de longueur. La raideur  $K_a$  représente, physiologiquement, l'effet des muscles tenseurs des cordes vocales ou des lèvres. Nous avons ajouté un terme  $P_a$  qui décrit l'effet d'une précontrainte d'appui des cordes ou des lèvres l'une contre l'autre : cet appui maintient l'anche fermée tant que  $P \leq P_a$ . Physiologiquement, l'appui  $P_a$  est réalisé par d'autres muscles que les muscles tenseurs : pour les lèvres, ce sont les muscles buccinateurs.

#### 4.5.2.1. Contrôle de la hauteur : longueur vibrante, tension, précontrainte

La fréquence d'auto-oscillation est commandée par la fréquence propre de l'anche forte :

$$f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_a}{\rho_L L}} \quad [4.197]$$

Pour les lèvres, l'obtention de notes ascendantes est réalisée par augmentation de  $K_a$  (tension des lèvres), diminution de  $L$  (longueur vibrante), diminution de  $\rho_L$  (amincissement des lèvres). Pour les cordes vocales, la montée en *voix pleine* se fait par augmentation progressive de tension ( $K_a$ ) et diminution progressive de longueur vibrante ( $L$ ). Au-delà d'un effort excessif de tension, il y a basculement en *voix de fausset*, avec accolement des cordes vocales en *bourrelets minces*, ce qui se traduit par une chute importante de  $\rho_L$ . Les observations ci-dessus ont été faites par laryngoscopie, glottographie, fibroscopie optique. On peut supposer que, lorsque la réalisation d'une tension élevée ( $K_a$  grand) entraîne par synergie l'existence d'une pression d'appui  $P_a$ , l'ouverture de l'anche nécessitera une pression d'air  $P$  minimum d'autant plus élevée que  $P_a$  sera grand. Il sera alors impossible de chan-

ter ou de jouer *pianissimo* dans l'aigu. Un changement de technique supprimant cette synergie permettra, au contraire, de faire coexister une grande valeur de  $K_a$  avec une valeur faible de  $P_a$ . Dans la pratique du chant, de nombreuses différences de techniques se rencontrent suivant les écoles, présentes et passées, avec des résultats sonores chaque fois différents.

L'auto-oscillation de *type II* nécessite l'entretien d'une anche massique :

$$\left[ M_a(\omega^2 - \omega_a^2) - jQ^{-1} \frac{\omega}{\omega_a} K_a \right] h_o = S_a p_o \exp(j\psi) \quad [4.198]$$

On a explicité la phase  $\psi$  de la position de l'anche  $h = h_o \exp[-j(\omega t + \psi)]$  par rapport à la pression  $p = p_o \exp(-j\omega t)$ . En séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient les deux relations suivantes :

$$\omega^2 - \omega_a^2 = \frac{S_a p_o}{M_a h_o} \cos \psi \quad [4.199]$$

$$Q^{-1} \frac{\omega}{\omega_a} \approx Q^{-1} \approx \frac{S_a p_o}{K_a h_o} \sin \psi \quad (\omega \approx \omega_a) \quad [4.200]$$

La phase  $\psi$  est fixée par la géométrie de l'écoulement. Le fonctionnement de *type II* nécessite  $\cos \psi$  et  $\sin \psi$  tous deux positifs, soit :

$$0 < \psi < \pi/2 \quad [4.201]$$

Les deux équations [4.199] et [4.200] déterminent, en régime permanent,  $\psi$  étant fixée, les deux inconnues  $\omega$  et  $p_o/h_o$  :

$$\omega = \omega_a \sqrt{1 + \frac{1}{Q \tan \psi}} \quad \frac{p_o}{h_o} \approx \frac{K_a}{S_a} \frac{1}{Q \sin \psi} \quad [4.202]$$

Contrairement au cas d'un oscillateur entretenu, l'amplitude de l'auto-oscillation en régime permanent reste indéterminée. Il faudrait un modèle non linéaire des pertes pour trouver l'amplitude limite.

En régime transitoire, l'amplitude de la réponse  $h_o$  s'adapte sur l'amplitude de l'excitation  $p_o$  avec un retard contrôlé par le temps de montée de l'oscillateur,

c'est-à-dire :

$$\tau \approx \frac{2Q}{\omega_a} \quad [4.203]$$

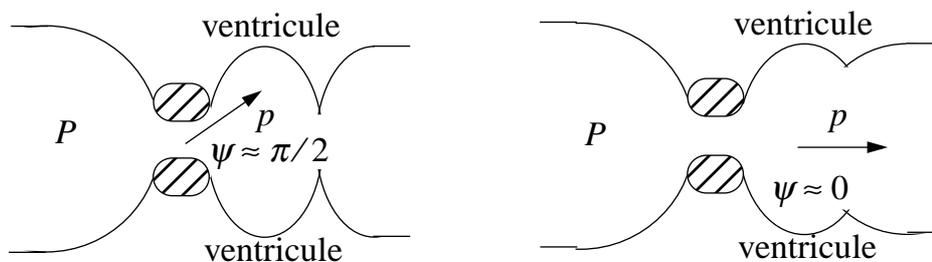
Chacun a pu remarquer qu'un choc sur la poitrine pendant la phonation, entraînant une brusque montée de pression, a pour effet une brève impulsion de fréquence vers le haut (régime hors équilibre). Ceci pourrait se comprendre sur l'équation [4.199] qui donne la fréquence d'auto-oscillation. On peut supposer que les tensions musculaires ne changent pas à l'instant du choc ( $\omega_a$  inchangée). La brusque augmentation de  $P$  entraîne un accroissement brutal de  $p_o$ , lequel est parfaitement audible. La réponse  $h_o$  de l'oscillateur n'atteint le régime permanent qu'au bout du temps  $\tau$ . L'équation [4.199] appliquée au régime transitoire montre alors que la fréquence devrait subir une impulsion vers le haut au moment du choc : c'est bien ce qui se passe dans l'expérience.

#### 4.5.2.2. Contrôle de la phase : ventricules de Morgani, embouchure

Nous allons maintenant commenter l'équation [4.200] qui exprime la compensation des pertes.

Les ventricules de Morgani sont le volume existant au-dessus des cordes vocales, limité par les bandes ventriculaires ("fausses cordes"). La fibroscopie optique a permis la réalisation de plusieurs films documentaires sur le mouvement des cordes vocales pendant la phonation, certains de ces films ont d'ailleurs été diffusés à la télévision. Les lecteurs qui ont eu la chance de les voir auront remarqué que, systématiquement avant la phonation, les bandes ventriculaires se rapprochent pour fermer ce volume, et qu'elles s'ouvrent dès la phonation enclenchée.

La présence d'un volume d'air enclos en aval des cordes vocales apporte un



**Figure 4.23.** *Ventricules de Morgani.*

retard de la pression sur la position de l'anche :

$$hLU = \dot{p} \frac{V}{K} \quad \rightarrow \quad \psi \approx \pi/2 \quad [4.204]$$

La condition d'entretien s'écrit alors :

$$Q^{-1} \approx \frac{S_a p_o}{K_a h_o} \sin \psi \approx \frac{S_a p_o}{K_a h_o} \quad [4.205]$$

La géométrie de l'écoulement facilite la compensation des pertes dans ce régime de démarrage de l'oscillation, où la pression acoustique  $p_o$  est encore faible. L'ouverture du conduit vocal amène un régime proche d'onde plane dans un tuyau dont on fait varier la section. La phase passe à l'autre extrême de la condition [4.201] :

$$\text{onde plane} \quad \rightarrow \quad \psi \approx 0 \quad [4.206]$$

Ce régime favorise l'obtention d'une grande puissance acoustique :

$$\frac{p_o}{h_o} \approx \frac{K_a Q^{-1}}{S_a \sin \psi} \rightarrow \infty \quad [4.207]$$

Dans ce régime, la fréquence émise est sensiblement supérieure à la fréquence propre :

$$f \approx f_o \sqrt{1 + \frac{S_a p_o}{K_a h_o}} \quad f_o \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_a}{\rho_L L}} \quad [4.208]$$

L'équation suggère que le contrôle de la fréquence émise risque d'être délicat, notamment si l'on est amené à varier la tension des cordes vocales  $K_a$ . Le passage en mécanisme de fausset dans la situation évoquée précédemment, à forte puissance, est provoqué par une tension excessive des cordes vocales. Il entraîne une forte diminution de  $\rho_L$  en même temps qu'une forte diminution de  $K_a$ . Même si l'on parvient à garder constante la fréquence propre  $f_o$ , la formule [4.208] prévoit que le terme correctif fonction de  $K_a$  devrait produire une impulsion de fréquence vers le haut au moment de la chute de tension  $K_a$ . L'expérience est facile à faire, même si on n'apprécie que modérément l'effet esthétique du résultat : quand on monte un glissando en mécanisme de voix pleine, nuance *forte*, jusqu'à-ce-que la

voix “casse” en mécanisme de fausset, on constate un saut brutal de fréquence vers le haut, très difficile à contrôler, au moment du passage. Lors du passage inverse, de voix de fausset en voix pleine, le saut a lieu vers le bas (brusque augmentation de  $K_a$ ). Dans l’esthétique actuelle de la voix de ténor d’opéra, la coutume interdit purement et simplement, depuis le début de ce siècle, l’usage de la voix de fausset : le problème n’a pas été résolu, il a été éliminé.

Le fait que les observations concordent avec le modèle est, bien sûr, plus agréable que si elles le contredisaient, mais ne constitue pas une preuve de la validité du modèle dans la mesure où l’on peut probablement imaginer d’autres mécanismes qui conduiraient au même résultat. L’existence de la force de Bernoulli vient compliquer la situation.

#### 4.5.2.3. Le formant de l’embouchure des cuivres

L’embouchure des cuivres, en introduisant un retard de phase  $\psi \approx \pi/2$  de la pression sur la position, facilite au mieux la mise en vibration des lèvres. Nous allons voir qu’elle a également un effet sur le timbre.

Le circuit électrique équivalent comporte une capacité en dérivation, qui représente le volume de l’embouchure, et une self en série qui correspond à l’impédance massique de l’air dans le *grain d’orge*. À hautes fréquences, on atteint la fréquence d’Helmholtz du résonateur constitué par ce système volume-masse. Pour cette fréquence, à un mouvement de l’air entrant dans l’embouchure par l’ouverture des lèvres correspond un mouvement entrant également dans l’embouchure par l’ouverture du grain d’orge : il y a donc inversion de la vitesse acoustique et, si on injecte de l’énergie au niveau des lèvres, on en consomme au niveau du grain d’orge (source négative). Au-dessus de cette fréquence, à cause de la self, l’énergie en sortie de la source est réactive : l’entretien du résonateur devient donc impossible. En dessous de la fréquence d’Helmholtz, le filtre n’intervient pas.

À très basses fréquences cependant, comme le *grain d’orge* a un très petit diamètre, il est le siège d’une importante perte de charge par viscosité qui dégrade la qualité de l’entretien.

Au total, par conséquent, l’embouchure des cuivres constitue un filtre passe

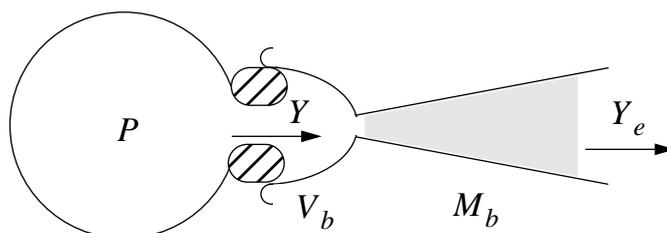


Figure 4.24. Embouchure des cuivres.

bande entre la limite hautes fréquences (fréquence de résonance) et la limite basses fréquences (effets de viscosité). L'adjonction d'une embouchure à un résonateur a pour effet d'imposer un formant aux pics d'impédance du résonateur, dont l'effet se retrouve dans le son produit. L'importance de ce formant est d'autant plus marquée que le rétrécissement au grain d'orge est plus net (plus marqué pour la trompette que pour le cor). La fréquence formantique augmente si le volume de l'embouchure diminue (fréquence plus élevée pour la trompette que pour le cor).

On veillera à ne pas confondre l'embouchure avec un résonateur d'Helmholtz en dérivation (voir ci-après cheminées du basson).

### 4.5.3. *Système exciteur des flûtes*

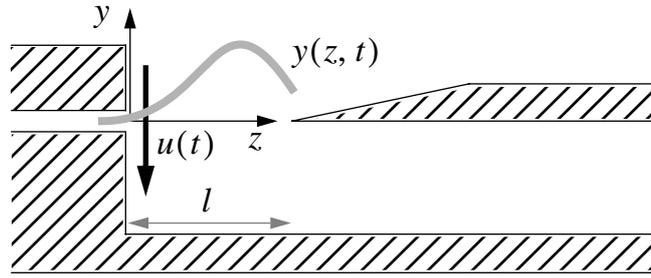
Dans une embouchure de flûte, l'entretien se fait par l'oscillation d'un jet d'air exciteur. L'existence, dans la bouche de la flûte, d'une vitesse acoustique, provenant du champ acoustique présent dans le tuyau, entraîne une déviation périodique du jet. D'autre part, au cours de son oscillation, le jet pénètre périodiquement dans le tuyau et lui apporte de l'énergie. Dans cette présentation de l'entretien, due à Fletcher, on voit que l'on renonce d'emblée à décrire la naissance de l'oscillation. Mais il faudra renoncer encore à beaucoup d'autres choses car la déviation du jet par un champ acoustique constitue en-soi un problème complexe, l'interaction d'un jet avec un biseau constitue en-soi un autre problème complexe, et ces deux problèmes se trouvent interconnectés dans la flûte.

Soit  $u(t) = u_0 \exp(-j\omega t)$  la vitesse acoustique responsable de la déviation du jet, et  $y(z,t)$  la déviation du jet,  $z$  étant l'abscisse dans l'embouchure comptée dans le sens du jet. À l'instant  $t = 0$ , l'air débouchant de la "lumière" en  $z = 0$  est dévié. Le sens de cette déviation n'est pas celui que l'on croirait naïvement. Le champ acoustique pénètre dans la lumière, diminuant la vitesse  $v$  du jet au voisinage du bord où il pénètre, l'augmentant au voisinage du bord où il sort. On démontre que le jet est dévié avec une vitesse initiale proportionnelle à  $-u(t)$  :

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} y(z,t) \right|_{z=0} \propto -u(t)$$

(en sens inverse de  $u(t)$ ). Lorsque cette "particule" de jet parvient vers le biseau en  $z = l$ , la phase de sa position  $y(l, t)$  est en retard par rapport à la phase de  $y(0, t)$  d'un temps de parcours  $l/c_j$  où  $c_j$  est la vitesse de propagation d'une perturbation transversale le long du jet. On a donc :

$$y(z,t) = A(z) \frac{-u_0}{-j\omega} \exp[-j\omega(t - z/c_j)] \quad [4.209]$$



**Figure 4.25.** *Embouchure de flûte.*

Lorsque le jet oscillant pénètre dans la flûte, il génère une pression acoustique. La phase de cette pression est celle de  $-y(l, t)$  ( $p$  devient faiblement positive quand  $y$  devient faiblement négative). Supposons l'amplitude de l'effet ( $p$ ) proportionnelle à la cause ( $u$ ). Il vient :

$$p(t) \propto -y(l, t) = \frac{A(l)}{\omega} u_o \exp(-j\omega t) \exp\left[j\left(\frac{\omega l}{c_j} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$p(t) = Bu(t) \exp\left[j\left(\frac{\omega l}{c_j} + \frac{\pi}{2}\right)\right] \quad [4.210]$$

On en tire l'impédance acoustique de la source, rapport de la pression sur le débit à l'entrée du résonateur :

$$Z_e = C \exp\left[j\left(\frac{\omega l}{c_j} + \frac{\pi}{2}\right)\right] \quad [4.211]$$

Reste à préciser la constante  $C$  par des considérations énergétiques. En ce qui concerne le rôle du résonateur dans l'entretien, la puissance acoustique de la source  $\langle P \rangle = \langle S p u \rangle = (1/2) \text{Re} Z u_o^2$  doit être proportionnelle à  $u_o^2$ , comme l'énergie du résonateur, et c'est bien le cas. Par ailleurs, en ce qui concerne le rôle du jet, la constante  $C$  doit être proportionnelle à la puissance mécanique apportée par le jet.

Or, pour un débit volumique  $\phi$  du jet apportant une énergie cinétique  $\rho v^2/2$  par unité de volume, la puissance mécanique apportée par le jet est proportionnelle à  $\phi \rho v^2/2$ . En notant  $P$  la pression du réservoir, comme  $P = \rho v^2/2$ , cette puis-

sance mécanique est donc proportionnelle à  $\phi P$ . Finalement :

$$Z_e = \gamma \phi P \exp \left[ j \left( \frac{\omega l}{c_j} + \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad \text{avec} \quad c_j \approx 0,4 v = 0,4 \sqrt{\frac{2P}{\rho}} \quad [4.212]$$

où  $\gamma$  est un facteur géométrique peu dépendant de  $P$  et de  $u$ . La vitesse de propagation d'une perturbation transversale le long du jet est sensiblement proportionnelle à la vitesse du jet. Pour des conditions typiques rencontrées dans une flûte, l'ordre de grandeur est :  $c_j \approx 0,4 v$ . Dans le plan complexe, la courbe  $Z_e(P)$  a la forme d'une spirale enroulée autour de l'origine.

Contrairement aux situations habituelles d'auto-oscillation, en acoustique comme en électronique, le flûtiste est maître de la phase de l'impédance d'entrée. En effet, cette phase est contrôlée par le rapport de la distance lèvres-biseau à la vitesse du jet. La fréquence augmente ou diminue selon qu'on diminue ou augmente ce rapport, en modifiant la vitesse du jet ou bien la distance lèvres-biseau. On peut déplacer à volonté la fréquence de jeu de part et d'autre de la fréquence propre du tuyau. Les conditions d'auto-oscillation se résument ainsi :

$$\text{possibilité d'entretien} \quad \cos \left( \frac{\omega l}{c_j} + \frac{\pi}{2} \right) > 0 \quad [4.213]$$

$$\begin{array}{ll} \text{fréquence} & \sin \left( \frac{\omega l}{c_j} + \frac{\pi}{2} \right) < 0 \\ \text{augmentée} & \\ \text{fréquence} & \sin \left( \frac{\omega l}{c_j} + \frac{\pi}{2} \right) > 0 \\ \text{diminuée} & \end{array} \quad [4.214]$$

La fréquence de jeu est égale à la fréquence propre si

$$\frac{\omega l}{c_j} = \frac{3\pi}{2} \quad \text{soit} \quad f_n l / v \approx 0,3$$

Supposons un flûtiste jouant le *la* à la fréquence  $f_n = 440\text{Hz}$  avec une distance lèvres-biseau  $l = 1\text{cm}$ , il faut une vitesse de jet  $v = 1,46\text{m/s}$ .

Supposons maintenant qu'il diminue fortement la vitesse de jet et réalise

$$\frac{\omega l}{c_j} = \frac{7\pi}{2} \quad \text{soit} \quad v = \frac{1,46 \times 7}{3} = 0,626\text{m/s}$$

Le flûtiste devrait alors, d'après le modèle, retrouver la même note, avec la même distance lèvres-biseau, mais une puissance acoustique plus faible.

Dans la pratique, l'expérience marche bien avec un bourdon d'orgue (tuyau fermé à l'extrémité). Il suffit de couper la soufflerie pour faire chuter la pression d'alimentation. On entend la hauteur baisser, puis le son s'arrêter (source négative) et, plus tard, la même note réapparaître un peu plus haut pour baisser à nouveau :

on a alors décrit la première branche de la spirale de  $Z_e$  dans le plan complexe.

Entre ces deux régimes, on entend en général un autre partiel du tuyau (fréquence plus élevée) : chaque partiel possède, en effet, sa spirale d'impédance complexe et la position respective de ces spirales contrôle, parmi tous ces partiels, lequel sera émis pour une distance lèvres-biseau et une vitesse de jet données.

Sur une flûte traversière, les premiers partiels en régime de faible pression semblent plus délicats à obtenir.

Comparé à l'expérience, le modèle ne marche pas mal quant au comportement de la phase de  $Z_e$ . Le module de  $Z_e$  décroît par contre, expérimentalement, beaucoup plus vite avec  $P$  que ne le prévoit la formule [4.212]. La raison en est la présence prépondérante de mécanismes de pertes liés à l'existence de tourbillons dans l'écoulement. L'aérodynamique de la flûte ne peut faire l'économie d'une étude détaillée de ce régime tourbillonnaire dès que l'on aborde un niveau de modélisation plus fin (voir B. Fabre, A. Hirschberg).

## 4.6. Rayonnement des instruments à vent

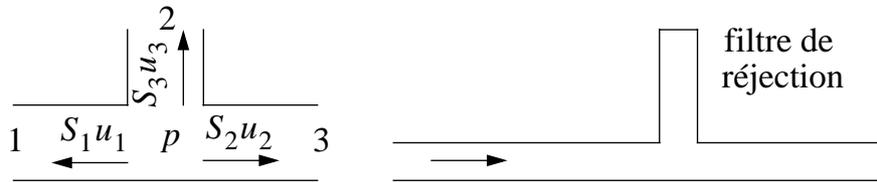
Nous ajouterons quelques remarques à ce qui a été dit au début de chapitre 2. La puissance rayonnée à l'extrémité ou par un trou latéral est proportionnelle à  $Z_{\text{ray}}$  : on la connaît si l'on connaît le champ interne. Celui-ci est difficile à calculer car le spectre est contrôlé par la non-linéarité du système excitateur. Si le résonateur a un pavillon terminal, il faut remplacer  $Z_{\text{ray}}$  par son impédance ramenée  $Z_{\text{pav}}$ .

### 4.6.1. Transmission par le pavillon terminal

On peut calculer l'impédance ramenée du pavillon terminal  $Z_{\text{pav}}$  par la même démarche que nous avons utilisée pour la transmission à travers une plaque (voir [4.104]). Les pulsations complexes des modes propres s'obtiennent alors en remplaçant l'impédance de rayonnement par cette impédance ramenée. Le pavillon est un filtre passe-haut qui enrichit le rayonnement en fréquences aiguës.

#### 4.6.2. Remarques sur les trous latéraux

Les bois de l'orchestre sont munis de trous latéraux. Chaque trou constitue une



**Figure 4.26.** Trous latéraux ouverts ou fermés.

dérivation du résonateur pour laquelle on peut écrire des conditions de continuité : la pression est commune aux trois branches et la somme des débits égale à zéro. Un trou fermé constitue un résonateur en dérivation. Le circuit équivalent est un circuit bouchon (capacité et self en dérivation), on a donc un filtre de réjection à sa fréquence de résonance. L'effet est très marqué dans le basson car les trous sont étroits et longs, l'épaisseur de bois à traverser étant importante. Ces *cheminées*, en supprimant du spectre leur fréquence de résonance, donnent le caractère nasal très spécifique de la sonorité du basson. Chaque trou ouvert constituant une source, le champ rayonné est particulièrement tourmenté pour un instrument de grande longueur tel que le basson.

### 4.7. Bilan d'énergie, rendement acoustique des instruments

Une partie seulement de l'énergie fournie à l'instrument se retrouve sous forme d'énergie acoustique rayonnée, le reste est dissipé par les différents mécanismes de pertes. Ce fait est apparu clairement dans l'expression du facteur de qualité. Nous allons préciser le lien entre énergie dissipée et facteur de qualité.

#### 4.7.1. Rendement des instruments à vent

Reprenons le modèle de base où tout le rayonnement se produit à l'extrémité ouverte  $x = L$ . La puissance acoustique de la source est :

$$\langle P_{\text{ray}} \rangle = \langle Spu|_{x=L} \rangle = S \operatorname{Re} Z_{\text{ray}} |u(L)|^2 / 2 \quad [4.215]$$

Comme  $Z_{\text{ray}}$  est petit, il suffit d'évaluer  $u(L)$  à l'état non perturbé. Nous prendrons deux exemples.

#### 4.7.1.1. Cas de la flûte

La puissance acoustique entrante  $P_{\text{entr}}$  à l'embouchure s'obtient à partir de  $Z_e$ , admittance acoustique de la source, d'une façon similaire.

Pour le cylindre non perturbé ouvert aux deux bouts :

$$u = u_o \cos kx \exp(-j\omega t) \quad u(0) = u(L) = u_o \quad S(0) = S(L) = S \quad [4.216]$$

On peut définir le rendement acoustique comme le rapport entre la puissance acoustique rayonnée et la puissance acoustique entrante :

$$R = \frac{\langle P_{\text{ray}} \rangle}{\langle P_{\text{entr}} \rangle} = \frac{S \operatorname{Re} Z_{\text{ray}} u_o^2 / 2}{\operatorname{Re} Z_e (S u_o)^2 / 2} = \frac{\operatorname{Re} Z_{\text{ray}}}{S \operatorname{Re} Z_e} \quad [4.217]$$

En tenant compte de [4.153] et [4.154], il vient pour le partiel de fréquence  $f_n$  :

$$\frac{\operatorname{Re} Z_e}{\rho c} \approx \frac{L}{r^2 c} f_n Q_n^{-1} \quad Q_n^{-1} = \frac{\beta}{r} \frac{1}{\sqrt{f_n}} + \frac{4\pi\theta r^2}{cL} f_n \quad \frac{\operatorname{Re} Z_{\text{ray}}}{\rho c} \approx \frac{4\pi^2 \theta r^2}{c^2} f_n^2 \quad [4.218]$$

$$R = \frac{\frac{4\pi\theta r^2}{cL} f_n}{\frac{\beta}{r} \frac{1}{\sqrt{f_n}} + \frac{4\pi\theta r^2}{cL} f_n} \quad [4.219]$$

Le rendement peut donc s'évaluer directement à partir de  $Q_n^{-1}$ .

#### 4.7.1.2. Cas de la clarinette

La puissance acoustique entrante est donnée par :

$$\langle P_{\text{entr}} \rangle = \langle Spu|_{x=0} \rangle = \text{Re}Y_e |p_o|^2 / 2 \quad [4.220]$$

Pour le cylindre non perturbé fermé à l'origine :

$$p = p_o \cos kx \exp(-j\omega t) \quad u = j \frac{p_o}{\rho c} \sin kx \exp(-j\omega t) \quad u_o = \frac{p_o}{\rho c} \quad [4.221]$$

$$R = \frac{\langle P_{\text{ray}} \rangle}{\langle P_{\text{entr}} \rangle} = \frac{S \text{Re}Z_{\text{ray}}}{(\rho c)^2 \text{Re}Y_e} \quad [4.222]$$

En tenant compte de [4.156] et [4.157], il vient :

$$\frac{\rho c \text{Re}Y_e}{\pi r^2} = \frac{\pi L}{c} f_n Q_n^{-1} \quad Q_n^{-1} = \frac{\beta}{r} \frac{1}{\sqrt{f_n}} + \frac{4\pi\theta r^2}{cL} f_n \quad \frac{\text{Re}Z_{\text{ray}}}{\rho c} \approx \frac{4\pi^2 \theta r^2}{c^2} f_n^2 \quad [4.223]$$

$$R = \frac{\frac{4\pi\theta r^2}{cL} f_n}{\frac{\beta}{r} \frac{1}{\sqrt{f_n}} + \frac{4\pi\theta r^2}{cL} f_n} \quad [4.224]$$

Le rendement est donné par la même expression que pour la flûte.

En fait, la définition que nous avons choisie pour le rendement est quelque peu optimiste dans la mesure où elle fait abstraction de l'énergie dissipée par le système exciteur lors de la conversion de l'énergie potentielle statique fournie par l'instrumentiste en énergie acoustique entrante. Ce quotient est difficile à évaluer car il demande une bonne description du mécanisme non linéaire sur lequel la conversion repose. Pour la flûte, par exemple, (B. Fabre, thèse, L.A.M.), le rendement est fortement abaissé par la présence d'un tourbillon dissipatif qui accompagne le jet.

#### 4.7.2. Rendement des instruments à cordes

La puissance mécanique fournie par la corde à la table d'harmonie s'écrit :

$$\langle P_{\text{four}} \rangle = \langle f(t)u(t) \rangle = \operatorname{Re} Y_{ch} \frac{f_o^2}{2} \exp(-2t/\tau) \quad [4.225]$$

Pour la corde à l'état non perturbé, l'effort tranchant et la vitesse vérifient :

$$\begin{aligned} f(t) &= f_o \cos kx \exp(-j\omega t) \exp(-t/\tau) & \frac{f_o}{u_o} &= \rho_L c_t = \sqrt{\rho_L T} \\ u(t) &= u_o \sin kx \exp(-j\omega t) \exp(-t/\tau) \end{aligned} \quad [4.226]$$

La puissance dissipée par frottement dans l'air  $\langle P_{\text{air}} \rangle$  est donnée par :

$$\langle P_{\text{air}} \rangle = \frac{R_L u_o^2}{2} \exp(-2t/\tau) \int_0^L (\sin kx)^2 dx = \frac{R_L L}{2\rho_L T} \frac{f_o^2}{2} \exp(-2t/\tau) \quad [4.227]$$

$$\text{avec } \tau = Q_n / (\pi f_n) \quad [4.228]$$

En utilisant [4.88], on peut écrire ( $\delta_{\text{corde}}$  angle de pertes dans la corde) :

$$Q_n^{-1} = \frac{T}{\pi L f_n} \left[ \frac{R_L L}{2\rho_L T} + \frac{4\pi^3 EI \rho_L L}{T^3} \delta_{\text{corde}} f_n^3 + \operatorname{Re} Y_{ch} \right] \quad [4.229]$$

On en tire le rapport entre la puissance mécanique  $\langle P_{\text{four}} \rangle$  fournie à la table d'harmonie et la puissance mécanique totale dissipée  $\langle P_{\text{diss}} \rangle$  :

$$\frac{\langle P_{\text{four}} \rangle}{\langle P_{\text{diss}} \rangle} = \frac{\operatorname{Re} Y_{ch}}{\frac{R_L L}{2\rho_L T} + \frac{4\pi^3 EI \rho_L L}{T^3} \delta_{\text{corde}} f_n^3 + \operatorname{Re} Y_{ch}} \quad [4.230]$$

Assimilons la table d'harmonie à une plaque homogène et isotrope, de masse  $\rho_S$  par unité de surface, de raideur  $K_S(1 - j\delta_{\text{table}})$  (compte tenu des pertes viscoélas-

tiques), soumise à une résistance mécanique  $R_S$  par unité de surface (compte tenu du rayonnement et éventuellement du frottement visqueux dans l'air). L'équation de la dynamique s'écrit :

$$\rho_S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + R_S \frac{\partial y}{\partial t} + K_S(1 - j\delta_{\text{table}})\Delta^2 y = 0 \quad [4.231]$$

On néglige la masse ajoutée par le rayonnement devant celle de la table : elle est effectivement négligeable. Pour un mode propre de pulsation complexe  $\omega$  :

$$\omega^2 = \frac{K_S(1 - j\delta_{\text{table}})}{\rho_S(1 + jR_S/\rho_S\omega)} k^4 \quad Q_{nm}^{-1} = \delta_{\text{table}} + \frac{R_S}{2\pi\rho_S} \frac{1}{f_{nm}} \quad [4.232]$$

Négligeons la résistance de frottement visqueux devant la résistance de rayonnement ( $R_S \approx \text{Re}Z_{\text{ray}}$ , approximation qui semble justifiée dans les cas d'intérêt). Supposons que la corde attaque la table sur l'un de ses modes ( $f_n = f \approx f_{nm}$ ).

On tire de [4.230] et [4.232] l'évaluation suivante du rendement acoustique :

$$R = \frac{\langle P_{\text{ray}} \rangle}{\langle P_{\text{diss}} \rangle} = \frac{\text{Re}Y_{ch}}{\frac{R_L L}{2\rho_L T} + \frac{4\pi^3 EI\rho_L L}{T^3} \delta_{\text{corde}} f^3 + \text{Re}Y_{ch}} \frac{\frac{\text{Re}Z_{\text{ray}}}{2\pi\rho_S} \frac{1}{f}}{\delta_{\text{table}} + \frac{\text{Re}Z_{\text{ray}}}{2\pi\rho_S} \frac{1}{f}} \quad [4.233]$$

Pour les instruments à son non entretenu, une autre donnée fondamentale est le temps de décroissance  $\tau$ . Lorsque le temps de décroissance est contrôlé par l'admittance au chevalet (énergie dissipée dans la corde négligeable), on a, compte tenu de [4.228] et [4.229] :

$$\tau = \frac{L}{T \text{Re}Y_{ch}} \quad [4.234]$$

l'expression du rendement prenant la forme plus simple ci-dessous

$$R = \frac{\langle P_{\text{ray}} \rangle}{\langle P_{\text{diss}} \rangle} = \frac{\frac{\text{Re}Z_{\text{ray}}}{2\pi\rho_S} \frac{1}{f}}{\delta_{\text{table}} + \frac{\text{Re}Z_{\text{ray}}}{2\pi\rho_S} \frac{1}{f}} \quad [4.235]$$

Pour un mode de la table de masse modale  $M$ , de module d'élasticité  $K$ , de résistance mécanique  $R$ , on a, pour l'admittance au chevalet :

$$Y_{ch} = \frac{1}{R - j(M\omega - K/\omega)} \quad \text{Re}Y_{ch} = \frac{R}{R^2 + (M\omega - K/\omega)^2} \quad [4.236]$$

Pour avoir une bonne émission acoustique à basses fréquences, il faut que la première résonance de la table soit à fréquence plus basse que le fondamental de la corde afin que l'impédance de la table soit contrôlée par sa masse (même raisonnement que pour le haut-parleur, voir chapitre 2) :

$$\text{Re}Y_{ch} = \frac{R}{R^2 + (M\omega)^2} \quad \tau = \frac{L}{T} \frac{R^2 + (M\omega)^2}{R} \quad [4.237]$$

Une masse faible donnera une bonne puissance initiale rayonnée mais un son court (voir  $\rho_S$  dans [4.235] et  $M$  dans [4.237]). À l'inverse, si on augmente la masse de la table, la tenue de son sera améliorée, mais le son sera moins fort à l'attaque. Ce fait se constate assez nettement sur la guitare, par exemple.

En ce qui concerne l'émission acoustique des hautes fréquences, la clé du problème est donnée par le phénomène de coïncidence. Nous avons vu comment l'augmentation de la raideur abaisse la fréquence de coïncidence, ce qui a pour effet de renforcer le rayonnement.

On peut tenter d'évaluer le rendement acoustique au moyen de mesures d'amortissement en atmosphère réduite : voir B. David et X. Boutillon, *Using Vacuum to Measure the Acoustical Efficiency*, ISMA95, pp.379-385. Cependant, ce papier n'aborde pas la question des pertes dans la corde. En fait, dans tous les cas où l'on souhaite privilégier la durée du son pour une corde dont les pertes propres sont données, on est conduit à diminuer  $\text{Re}Y_{ch}$ , donc à perdre de la puissance rayonnée.

Dans le clavecin, par exemple, l'énergie est dissipée environ pour moitié dans la corde, l'autre moitié étant fournie à la table (C. Valette et C. Cuesta, *Mécanique des cordes vibrantes*, Hermès, p.131).

#### 4.8. Résumé

Dans ce chapitre, nous avons illustré au moyen des instruments de musique les possibilités de la représentation en modes propres (lorsque les effets non linéaires sont peu importants). Nous avons fait un inventaire détaillé des mécanismes dissipatifs. Nous avons décrit la mécanique des cordes vibrantes couplées à une table d'harmonie et donné quelques indications sur le rayonnement de celle-ci en intro-

duisant la fréquence de coïncidence. Nous avons également donné une description globale des résonateurs d'instruments à vent, en montrant l'influence de la couche limite aux parois et celle du rayonnement sur la justesse, et en esquissant une description simple des différents systèmes excitateurs.

• Bibliographie

M. Del Pedro et P. Pahud, *Mécanique Vibratoire*, Presses Polytechniques Romandes.

A. A. Shabana, *Theory of Vibration*, Springer Verlag.

A. A. Brun, A. Martinot-Lagarde, J. Mathieu, *Mécanique des Fluides*, Dunod.

C. J. Nederveen, *Acoustical Aspects of Woodwind Instruments.*, Uitgeverij Frits Knuf, Amsterdam.

J. Kergomard, *Champ interne et champ externe des instruments à vent*, thèse de Doctorat es Sciences, Paris 6 (1981).

N. Fletcher and T. Rossing., *The Physics of Musical Instruments*, Spinger-Verlag (1991).

Zener, Phys. Rev., **52**, p.230 (1937) et **53**, p.90-100 (1938).

